LES10A120 Tekniikan matematiikka 1 Tentti 21.10.2026. Mukana liite: Kaavaluettelo

Tentissä on sallittua käyttää laskinta, joko funktio-, graafista- tai CAS-laskinta.

Sallittu kirjallisuus: MAOL, Tekniikan kaavasto (Technical formulas), Beta.

Tee kuusi (6) tehtävää. Kustakin tehtävästä voi saada 4p. *Huomio! Kirjoita tehtävän vastaukseen riittävästi välivaiheita niin, että lukija näkee, että olet tehtävän ymmärtänyt.*

1. Derivoi
   a) $f(x) = (2x + 3)^6$
   b) $f(x) = \frac{3 - 4x}{3 + 4x}$
   c) $f(x) = e^{2x + 3}$
   d) $y = \cos(2x + 5)$

2. a) Kirjoita sen *tangenttisuoran* yhtälö, joka sivuaa käyrää $y = \sqrt{x}$ kohdassa $x_0 = 2$. (Vihje: $\sqrt{x} = x^{1/2}$)

   b) Laske raja-arvo $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ käyttämällä l'Hopitalin sääntöä. *Perustele ensin*, että voit käyttää l'Hopitalin sääntöä eli kyseessä on jokin tapauksista $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{1}$ tai $\frac{\infty}{0}$.

Tee 3a) ja 3b)!

3a. Integroi korvausmenetelmällä eli sijoituksella esim. u = ... (älä käytä osittaisintegrointimenetelmää)

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

3b. Laske käänteisfunktio funktiolle

$$f(x) = 2x + 3$$

Tee 4a tai 4B!

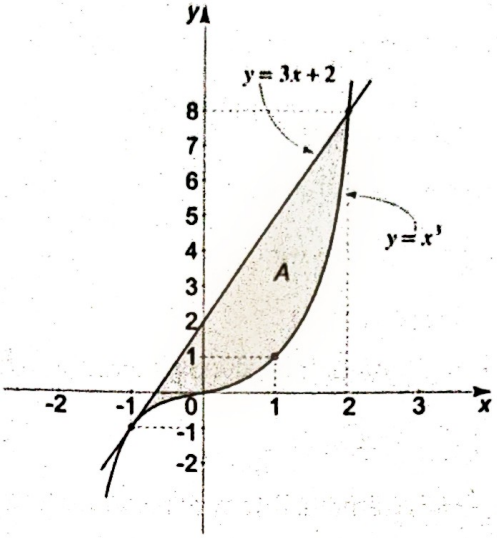
4a. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

TAI tee 4b (Vaihtoehtoinen tehtävä 4a:lle seuraavalla sivulla)

LUT Group Confidential - Other information (3Y)

4b. Laske pinta-ala alueelle, jota ympäröivät käyrät $y = x^3$ ja $y = 3x + 2$.



Tee 5a tai 5b!

5a. Etsi(laske) lokaalit maksimi- ja minimipisteet funktiolle $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Onko funktiolla globaaleja ääriarvopisteitä? Perustele! Piirrä taulukko (tässä riittää x-akselin kuva), jossa näkyvät kriittiset pisteet, lokaalit (ja globaalit?) ääriarvopisteet, funktion kulku (↗ tai ↘) sekä derivaatan merkki (+ tai −).

TAI tee 5b. (vaihtoehtoinen tehtävä tehtävälle 5a):

5b. Laske seuraava integraali osittaisintegroinnilla eli korvausmenetelmällä siten että esim. U=... ja dV=...sitten... .

$\int (x + 3)e^{2x} dx$

Tee 6a tai 6b!

6a. Derivoi funktio $y = (1 - 3x)^{cos(x)}$ Vinkki: Ota ensin logaritmit kummaltakin puolelta ja derivoi implisiittisesti, että saat y'.

TAI tee 6b. (vaihtoehtoinen tehtävä tehtävälle 6a):

6b. Kirjoita toista astetta oleva Taylorin polynomi $P_2(x)$ funktiolle $f(x) = x^{1/3}$ lähellä $x = 8$. Approksimoi funktion $f(x) = x^{1/3}$ arvoa kohdassa $x = 9$ laskien se kirjoittamallasi Taylorin polynomilla. Paljonko tulee virheen itseisarvoksi? -> Huom. Tässä riittää että lasket eron $P_2(9)$ ja $f(9)$ välillä ja kirjoitat eron itseisarvon.

LUT Group Confidential - Other information (3Y)

LES10A120 Tekniikan matematiikka 1 tentti, Kaavaluettelo

Sarjakehitelmiä, arviointia

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + O(x^{2n+3})$$

Derivointia, integrointia ja trigonometriaa, tangentin yhtälö

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \int U\,dV = UV - \int V\,dU$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a} \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \frac{1}{\cos x} = \sec x \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Arviointia

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad E(X) = \frac{f(x)}{2}(x-a)^2$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

LUT Group Confidential - Other information (3Y)

Peruslaskusääntöjä

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$(x^a \cdot x^b)^c = x^{ac} \cdot x^{bc} = x^{ac+bc}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

$$ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$\ln a^b = b \ln a$$

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

LUT Group Confidential - Other information (3Y)