BM20A8601 Tilastomatematiikka I
Tentti 05.10.2026

Tentissä on sallittua käyttää laskinta. Liitteinä ovat normaali- ja t-taulukot sekä kaavakokoelma. Muista kirjata välivaiheet näkyviin.

Tehtävä 1

Olkoon $X \sim N(50, 64)$, eli $\mu = 50$ and $\sigma^2 = 64$. Laske

(a) $P(X > 58)$;

(b) $P(42 < X < 62)$;

(c) $P(X < 46)$;

(d) $P(X < 66)$;

(e) arvo c jotta $P(X > c) = 0.05$.

Tehtävä 2

Satunnaismuuttujalla X on seuraavanlainen tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \le x \le 3, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

(a) Määritä vakio c.

(b) Laske $E(X)$ sekä $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Muodosta kertymäfunktio $F(x)$.

(d) Laske $P(1 < X < 2)$.

Tehtävä 3

Kuudentoista patterin käyttöikä mitattiin ja saatiin otoskeskiarvoksi $\bar{x} = 12.4$ tuntia sekä otoskeskihajonnaksi $s = 2.1$ tuntia. Oletetaan, että käyttöiät noudattavat normaalijakaumaa. Anna 95 % luottamusväli keskimääräiselle käyttöiälle. Miksi nyt käytetään t-taulukkoa eikä z-taulukkoa?

Tehtävä 4

Valmistaja väittää että sen patterit kestävät vähintään 20 tuntia. Kuluttajaryhmä testaa 10 patteria ja saa seuraavat käyttöiät (tunteina)

$$19.2,\ 20.5,\ 18.7,\ 19.8,\ 19.1,\ 20.1,\ 18.9,\ 19.5,\ 19.6,\ 18.6.$$

Oletetaan että käyttöikä on normaalijakautunut, testaa 5 % merkitsevyystasolla valmistajan väitteen paikkansapitävyys. Muuttuuko johtopäätös, jos testi tehdään 1 % merkitsevyystasolla?

Tehtävä 5

(a) TV:n käyttöikä noudattaa eksponenttijakaumaa keskiarvolla 12 vuotta. Liisa ostaa käyttetyn TV:n. Millä todennäköisyydellä TV toimii vielä seuraavat 8 vuotta? Selitä, miksi TV:n iällä ei ole väliä.

(b) Bussi saapumisaika pysäkille on tasajakutunut välille 0 ja 15 minuuttia, siitä hetkestä kun saavut pysäkille. Olkoon odotusaikasi W. Laske $E(W)$, $\mathrm{Var}(W)$, $P(W > 10)$ and $P(W > 10 \mid W > 5)$. Vertaa saamiasi tuloksia kohtaan (a)

Tehtävä 6

Monivalintakokeessa on 8 kysymystä, joissa jokaisessa on 3 vastausvaihtoehtoa, joista tasan yksi on oikea. Läpäistääkseen kokeen opiskelijan on vastattava oikein vähintään 5 kysymykseen. Opiskelija vastaa jokaiseen kysymykseen satunnaisesti

(a) Mikä jakauma kuvaa oikeiden vastauksien määrää ja miksi?

(b) Millä todennäköisyydellä opiskelija läpäisee tentin? What is the probability that the student passes?

(c) Mikä on oikeiden vastausten odotusarvo ja keskihajonta?

Todennäköisyyden ja tilastotieteen kaavakokoelma

Probability & Statistics — Cheat Sheet

Todennäköisyyden laskusäännöt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \varnothing$$
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
$$P(A) \le P(B), \quad \text{kun } A \subseteq B$$
$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Ehdollinen tn. & Bayes

$$P(E \mid A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A)}$$

Riippumattomuus: $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

Odotusarvo ja varianssi

Odotusarvo (diskreetti / jatkuva):

$$E(X) = \sum_{\nu} \nu \cdot P(X = \nu)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Kahden muuttujan funktio:

$$E\big(g(L,S)\big) = \sum_{l} \sum_{s} g(l,s)\, f(l,s)$$

Varianssi (määritelmä):

$$\mathrm{Var}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big]$$

Varianssi (laskentakaava):

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \big[E(X)\big]^2$$

Keskihajonta: $\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Lineaarisuussäännöt:

$$E(aX + b) = a\, E(X) + b$$
$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\, \mathrm{Var}(X)$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Jos X, Y riippumattomia:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Kovarianssi ja korrelaatio

Diskreetti:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{x} \sum_{y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)\, f(x,y)$$

Jatkuva:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \iint (x - \mu_X)(y - \mu_Y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

Laskentakaava:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y)$$

Otoskorrelaatio:

$$r(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_j (x_j - \bar{x})^2 \; \sum_j (y_j - \bar{y})^2}}$$

Reunajakaumat (marginaalit)

Diskreetit satunnaismuuttujat X, Y yht. pmf $p_{X,Y}(x,y)$:

$$p_X(x) = \sum_{y} p_{X,Y}(x,y)$$

$$p_Y(y) = \sum_{x} p_{X,Y}(x,y)$$

Jakaumat

Jatkuva tasajakauma $X \sim \text{Uniform}(a,b)$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < t < b \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{t-a}{b-a}, & a \le t \le b \\ 1, & t > b \end{cases}$$

$$E(X) = \tfrac{a+b}{2}, \qquad \text{Var}(X) = \tfrac{(b-a)^2}{12}$$

Eksponenttijakauma $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \tfrac{1}{\lambda}, \qquad \text{Var}(X) = \tfrac{1}{\lambda^2}$$

Normaalijakauma $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

$$E(X) = \mu, \qquad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

Bernoulli $X \sim \text{Ber}(p)$

$$f(k) = \begin{cases} 1-p, & k = 0 \\ p, & k = 1 \end{cases} \qquad E(X) = p,\ \text{Var}(X) = p(1-p)$$

Binomijakauma $X \sim \text{Bin}(n,p)$

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$E(X) = np, \qquad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

Geometrinen $X \sim \text{Geom}(p)$

$$f(k) = (1-p)^k p, \quad F(k) = 1 - (1-p)^{k+1}$$

$$E(X) = \tfrac{1}{p}, \qquad \text{Var}(X) = \tfrac{1-p}{p^2}$$

Poisson $X \sim \text{Poi}(\lambda)$

$$f(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \lambda, \qquad \text{Var}(X) = \lambda$$

Z-arvo ja luottamusväli

Standardointi:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Normitettu arvo (tunnettu σ):

$$NV(\vec{X}) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

T-suure (tuntematon σ):

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Luottamusväli merkitsevyystasolla α:

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{tai} \qquad \bar{X} \pm t_{\alpha/2,\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Otossuureet

Otoskeskiarvo:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Otosvarianssi (harhaton):

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Otoskeskihajonta: $s = \sqrt{s^2}$

Keskeinen raja-arvolause (CLT)

Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat i.i.d. ja $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty$$

Hyödyllisiä sääntöjä

Komplementtisääntö: $P(A^c) = 1 - P(A)$
De Morganin lait:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Standard normal table

The table below contains approximate values of the cumulative distribution function of the standard normal distribution

$$\Phi(x) = F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Student's t-distribution table

The table below contains approximate values of the quantile function

$$F^{-1}_{t,n-1}(p)$$

where $F_{t,n-1}$ is the cumulative distribution function for Student's t-distribution with degrees of freedom $n-1$. For example, $P(T \leq 1.2497\ldots) = p$ when $n-1 = 3$, $p = 0.85$ and T has the t-distribution with degrees of freedom $n-1$.

	p									
$n-1$	0.5000	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950	0.9990
1	0.0000	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	318.3088
2	0.0000	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.3271
3	0.0000	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.2145
4	0.0000	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732
5	0.0000	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934
6	0.0000	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076
7	0.0000	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853
8	0.0000	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008
9	0.0000	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968
10	0.0000	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437
11	0.0000	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247
12	0.0000	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296
13	0.0000	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520
14	0.0000	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874
15	0.0000	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328
16	0.0000	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862
17	0.0000	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458
18	0.0000	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105
19	0.0000	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794
20	0.0000	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518
21	0.0000	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272
22	0.0000	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050
23	0.0000	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850
24	0.0000	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668
25	0.0000	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502
26	0.0000	0.6840	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350
27	0.0000	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210
28	0.0000	0.6834	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082
29	0.0000	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962
30	0.0000	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852
31	0.0000	0.6825	0.8534	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440	3.3749
32	0.0000	0.6822	0.8530	1.0535	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385	3.3653
33	0.0000	0.6820	0.8526	1.0530	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333	3.3563
34	0.0000	0.6818	0.8523	1.0525	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.3479
35	0.0000	0.6816	0.8520	1.0520	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	3.3400
36	0.0000	0.6814	0.8517	1.0516	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	3.3326
37	0.0000	0.6812	0.8514	1.0512	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154	3.3256