BM20A8150 Integraalilaskenta insinööreille
Tentti 7.10.2026

Tentissä on sallittu kirjallisesta materiaalista vain MAOL, BETA, Tekniikan taulukkokirja (Valtanen), Matematiikan taulukkokirja (Valtanen) sekä käsin kirjoitettu, A4-kokoinen kaavakokoelma.

Laskin ei ole sallittu.

Vastaa jokaiseen tehtävään.

Integraalit tulee laskea loppuun asti, ellei toisin mainita.

1. (a) Laske
$$\int_0^1 x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$
käyttäen osittaisintegrointia. (3p)

   (b) Tutki, onko funktio $f(x) = \sin^5(x)$ parillinen vai pariton. Mitä voit tällöin päätellä integraalin
$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
arvosta? *Vihje: kohdan (b) integraalia ei kannata yrittää laskea suoraan.* (3p)

2. (a) Laske
$$\int_{-1}^1 |x^2 + x|\,\mathrm{d}x.$$ (3p)

   (b) Laske
$$\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$$
käyttäen sijoitusta $x = t - 1$. (3p)

3. (a) Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ sekä suorien $y = 0$ ja $x = 1$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuus. (3p)

   (b) Neljä metriä pitkä ohut metallitanko sijaitsee x-akselilla välillä $x \in [0, 4]$. Sen tiheys on
$$\rho(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \qquad x \in [0, 4],$$
missä x mitataan metreissä. Määritä tangon massakeskipisteen x-koordinaatti. (3p)
Vihje: Jos tämän kohdan integraalien laskeminen tuottaa hankaluuksia, kannattaa kokeilla samaa sijoitusta kuin tehtävässä 2 (b).

4. Radioaktiivisen atomin elinaikaa T kuvaa tiheysfunktio
$$f(t) = \begin{cases} (t+1)^{-2}, & \text{jos } t \geq 0 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$
Todennäköisyys, että elinaika T on välillä $[a, b]$, saadaan kaavasta $P(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Laske todennäköisyys $P(0 \leq T \leq 2)$. (3p)

   (b) Mikä on tämän atomin puoliintumisaika (eli aika $m \geq 0$, jolle $P(0 \leq T \leq m) = \frac{1}{2}$)? (3p)

5. Laske
$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$ (6p)