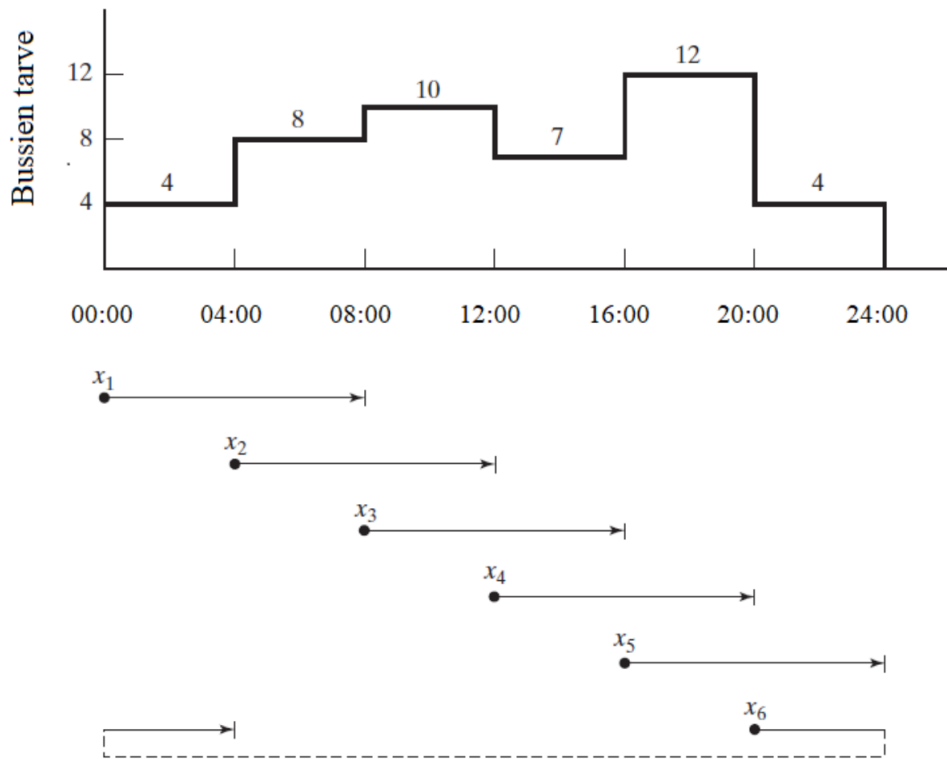


BM20A8201 Optimointi

Tentti 21.09.2026

Tenttiohjeet

- Vain tavalliset kirjoitusvälineet (kynä ja tyhjä paperi) ovat sallittuja tentissä.
 - Vastaa enintään **viiteen (5)** tehtävään; kukin on arvoltaan **6 pistettä**; tentin kokonaispistemäärä on **30**. Jos vastaat kaikkiin kuuteen (6) tehtävään, vain ensimmäiset viisi (5) arvioidaan.
1. Kaupungininsinööri Möttönen on saanut tehtäväkseen vähentää julkisesta liikenneestä tulevia päästöjä. Tätä varten hän on kerännyt tietoja selvittääkseen bussien vähimmäismäärän ajan funktiona (kuva alla). Muuttuja x_i kuvaa käytettävissä olevien bussien määrää kahdeksan tunnin jaksossa i , joista jokainen on ennalta määrätty. Muodosta lineaarinen optimointimalli, joka minimoi bussien kokonaismäärän.



2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - x_2 - 200$.
- Laske funktion f gradientti $\nabla f(x_1, x_2)$ mielivaltaisessa pisteessä $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
 - Etsi funktion f kriittiset pisteet.
 - Laske Hessen matriisi $\text{Hess} f$ ja etsi sen ominaisarvot.
 - Onko kuvauksella globaali minimi? Onko kuvauksella globaali maksimi? Määritä myös kyseiset ääriarvopisteet, mikäli ne ovat olemassa. Perustele vastauksesi käyttäen tietoa Hessen matriisin definiittisyydestä.

Tentti jatkuu seuraavalla sivulla!

3. Määritellään Matlabissa seuraavat rivit:

```
B = [0, 0, 0, 0];  
C = [55, 40, 20, 25];  
h = -[80, 70, 95, 90];  
X = [5, 7.5, 4, 4; 1, 1, 1, 1; 2, 2.5, 3.5, 3.5; 0.5, 0.5, 1, 0.5];  
d = [450, 120, 280, 80];  
[x,fval,exitflag,output] = linprog(h,X,d,[],[],B,C);
```

- (a) Kirjoita koodia vastaava LP-ongelma matemaattisin merkinnöin.
 - (b) Selitä, mitä linprog-algoritmin antamat tulokset ovat: x, fval, exitflag ja output. Riittää vain lyhyesti kertoa, että mitä 'exitflag' ja 'output' ovat.
4. (a) Määrittele Newtonin algoritmi usean muuttujan funktioiden kriittisten pisteiden etsimiseen matemaattisessa muodossa. Määrittele kaikki käytetyt matemaattiset merkinnät.
- (b) Olkoon $f(x, y) = 2x^4 - x^2 + y^4 + y^2$. Kirjoita Matlab-koodi, joka perustuu kohtaan (a) ja etsii funktion f kriittistä pistettä alkupisteestä $(x, y) = (1, 0)$ ja toleranssilla $\epsilon = 10^{-5}$.
5. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva.
- (a) Kirjoita funktion f kriittisen pisteen määritelmä.
 - (b) Kirjoita funktion f paikallisen ääriarvon (minimi ja maksimi) määritelmä.
 - (c) Näytä, että jos $a \in U$ on funktion f paikallinen ääriarvo, niin a on funktion f kriittinen piste.

6. Olkoon $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $b := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $c := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Määrittele käsite konvekksi monitahokas.
- (b) Määrittele käsite konveksin monitahokkaan kärkipiste.
- (c) Etsi joukon $\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b, 0 \leq x\}$ kärkipisteet. Voit käyttää erästä kurssilla esitettyä teoreemaa.
- (d) Etsi kohdefunktion $x \mapsto c^T x$ pienin arvo joukossa $\mathcal{P}$. Anna myös jokin piste, jossa kyseinen minimi saavutetaan.