

Koe koostuu viidestä tehtävästä. Jokainen tehtävä on 20 pisteen arvoinen. Yritä ratkaista kaikki tehtävät. Ratkaisujesi tulee sisältää välivaiheita ja selityksiä. Läpäistaksesi kurssin sinun täytyy saada kokeesta vähintään 50 pistettä.

Saat tuoda kokeeseen kaksipuoleisen käsinkirjoitetun A4-kokoisen lunttilapun. Kirjoita lunttilappuun nimesi ja palauta se kokeen päätteeksi. Saat tuoda kokeeseen myös laskimen. **Kokeeseen ei saa tuoda MAOLia tai jotakin muuta taulukkokirjaa.**

Tehtävä 1. Tarkastellaan liukulukujärjestelmää, jossa luvut esitetään muodossa

$$x = (-1)^{b_4} \cdot f \cdot 2^{e-2},$$

missä $b_4 \in \{0, 1\}$ määrää merkin sekä $f = (0.b_1b_0)_2$ ja $e = (b_3b_2)_2$ ovat mantissan ja eksponentin binääriesitykset. Määritä ja kirjoita desimaalimuodossa pienin positiivinen luku, joka voidaan esittää tässä liukulukujärjestelmässä.

Tehtävä 2. Olkoon $L(x)$ funktion $f(x) = (x+1)x^2$ lineaarinen approksimaatio (eli ensimmäisen asteen Taylorin polynomi) pisteessä $x_0 = 0$. Muodosta $L(x)$ ja käytä arvoa $L(1)$ funktioarvon $f(1)$ approksimointiin. Laske tämän approksimaation

- (a) virhe,
- (b) absoluuttinen virhe ja
- (c) suhteellinen virhe.

Tehtävä 3. Tutkitaan alkuarvotehtävää

$$y' = xy, \quad y(0) = 2.$$

- (a) Ratkaise tämä alkuarvotehtävä kohdassa $x = 4$ Eulerin menetelmällä käyttäen kahta askelta.
- (b) Ratkaise tämä alkuarvotehtävä kohdassa $x = 4$ keskipistemenetelmällä käyttäen kahta askelta.

Tehtävä 4. Seuraavia neljää iteraatiota käytetään numeeristen ongelmien ratkaisemiseen:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \tag{a}$$

$$x_{k+1} = x_k - \eta f'(x_k), \tag{b}$$

$$x_{k+1} = f(x_k), \tag{c}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{d}$$

Tässä $\eta, h > 0$. Kuvaile ja muotoile matemaattisesti numeerinen ongelma, jonka ratkaisemiseen kukin iteraatio on tarkoitettu.

Tehtävä 5. Olkoon $Q_n(f)$ Simpsonin säännön (n osaväliä) tuottama approksimaatio integraalille $\int_a^b f(x) \, dx$. Jos f on neljästi derivoituva välillä $[a, b]$, Simpsonin säännön virheelle pätee

$$\int_a^b f(x) \, dx - Q_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

jollakin $\xi \in (a, b)$.

- (a) Osoita, että Simpsonin sääntö on tarkka kaikille enintään asteen 3 polynomeille.
- (b) Asetetaan $b = 1$, $a = 0$ ja $n = 1$. Anna esimerkki funktiosta, jolla

$$\int_a^b f(x) \, dx - Q_n(f) = 1.$$