LES10A130 Tekniikan matematiikka 2 tentti 5.5.2026. Mukana liite: Kaavaluettelo. *Tentissä on sallittua käyttää laskinta, joko funktio-, graafista- tai CAS-laskinta (ei tietokonetta). Sallittu kirjallisuus: MAOL, Tekniikan kaavasto (Technical formulas)* ***Huomio:*** *Kirjoita näkyviin riittävästi välituloksia, että näkyy että osaat ja ymmärrät tehtävän.*

Tee kuusi (6) tehtävää. Kustakin tehtävästä voi saada 4p.

1. Laske matriiseille

a) Summa ja skalaarillla kertominen $2\cdot\left(\begin{bmatrix}5 & -7\\ 4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & -3\\ 4 & 0\end{bmatrix}\right)$ *kirjoita paperille summa välituloksena, ennen kuin teet skalaarilla kertomisen.*

b) Transpoosi $\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$

c) Matriisien kertolasku

$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w & x\\ y & z\end{bmatrix}$ *näytä paperille kirjoittamalla* tulon laskenta, eli kuinka tuo tulo lasketaan.

d) Matriisien kertolasku

$\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ *näytä paperille kirjoittamalla* tulon laskenta, eli kuinka tuo tulo lasketaan.

2. Määritä/laske käänteismatriisi matriisille

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3. Ratkaise Gauss-eliminaatiomenetelmällä yhtälöryhmä (ts. käytä sallittuja rivioperaatioita)

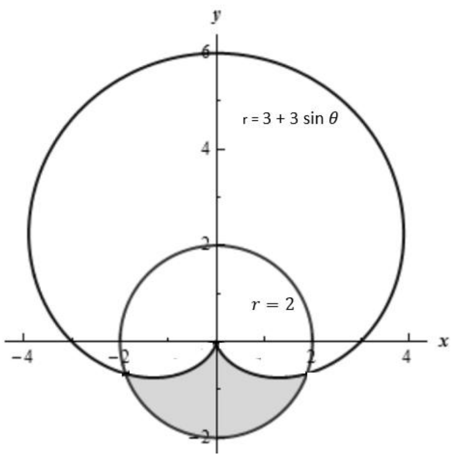
$$\begin{cases}2x - 2y + 4z = 10\\ 3x - 6y + 6z = 18\\ -2x + 5y - 3z = -11\end{cases}$$

4. Laske matriisin $A=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

5. Laske parametrisen käyrän $x = 3 - cos^3(t)$, $y = 4 + \sin(t)$, $0 \le t \le \pi$
ja $x - akselin\ välinen\ pinta\ ala.$ Huom. $sin(2\theta) = 2sin\theta \cos\ ja\ \ cos(2\theta) = 1 - 2\, sin^2\theta.$

6a. (Laske joko 6a **tai** 6b**!**) Määritä pinta-ala alueelle, joka on ympyrän $r = 2$ sisäpuolella ja käyrän $r = 3 + 3\ sin\ \theta$ ulkopuolella. Huom.

$$cos(2\theta) = 1 - 2\ sin^2\theta$$



6b) Laske (sievennä) mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon (Huom. $i^2 = -1$)

a) $\frac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \frac{3-i}{1+i}$

b) $2i(i-1)+\left(\sqrt{3}+i\right)^3 + (1+i)\overline{(1+i)}$

LES10A130 Tekniikan matematiikka 2 Tentti, kaavaluettelo

Trigonometrisia identiteettejä

$cos\ 2\theta = 1 - 2\,sin^2\theta$ $\quad sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ $\quad 1 + \cos\theta = 2cos^2\ (\theta/2)$

$sin^2\theta = \frac{1-cos(2\theta)}{2}$ $\quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Vektorilaskennan kaavoja

$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2}$ $\quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$ $\quad |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\theta$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{u} = 0$ ja $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{v} = 0$

u • v = 0, jos ja vain jos **u** ja **v** ovat kohtisuorat. $\quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \bullet (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Käyrän parametrisoinnin yhtälöitä

$x = r\cos\theta$ $\quad x^2 + y^2 = r^2$

$y = r\sin\theta$ $\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$

$$A = \int_a^b g(t) f'(t)dt \qquad A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

$$S = 2\pi \int_{t=a}^{t=b} |y| ds = 2\pi \int_a^b |g(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\ dt$$

Derivointia, integrointia ja kompleksilukuja / calculus

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$y = (x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ a^x = a^x\ ln\ a$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$$

$z = x + iy$ $\quad \bar{z} = x - iy$ $\quad |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ $\quad i^2 = -1$