

Tentaattori: Tomás Soto (tomas.soto@lut.fi)

Tentissä on sallittu kirjallisena materiaalina vain MAOL, BETA, Tekniikan taulukkokirja (Valtanen), Matematiikan taulukkokirja (Valtanen) sekä käsin kirjoitettu, A4-kokoinen kaavakokoelma. Kaavakokoelma ei saa sisältää minkäänlaisia esimerkkitehtäviä. **Kaavakokoelma tulee palauttaa tenttipaperin kanssa.** Laskin ei ole sallittu.

Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Kirjoita selkeästi, ja **muista perustella vastauksesi.**

1. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt/alkuarvot tehtävät. Millä väleillä ratkaisut on määriteltä?

$$(i) \ y' + y^2 = 0; \qquad (ii) \ y''(x) - \cos(x) - 3 = 0, \quad \begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

(3 p per kohta).

2. Ovatko seuraavat differentiaaliyhtälöt separoituvia? Ratkaise kaikki separoituvat yhtälöt separoimalla.

$$(i) \ y' = e^x(1 + y); \qquad (ii) \ y = e^x(1 + y'); \qquad (iii) \ \frac{dy}{dx} = \frac{y(x^3 - 1) + y}{x(y^3 - 1) + x}$$

(2 p per kohta).

3. Ideaalitalanteessa jousi-punnus-systeemi noudattaa Hooken lakia: $F = -kx$, missä $k > 0$ on jousen jousivakio, funktio $x(t)$ kuvaa punnuksen poikkeamaa tasapainoasemaan $x = 0$ nähden ja F on jousivoima, joka pyrkii vetämään punnuksen takaisin. Toisaalta Newtonin toisen lain nojalla $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$, missä m on punnuksen massa ja $a(t)$ on kappaleen kiihtyvyys.

- (i) Ratkaise ideaalitalannetta vastaavasta toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä systeemin liikerata $x(t)$, kun oletetaan, että punnus lähtee levosta (eli nopeus $v(0) = 0$), ja osoita, että se muistuttaa kosinifunktioita. Miten systeemi käyttäytyy, kun $t \rightarrow \infty$?
- (ii) Oikeassa maailmassa systeemi ei toimi näin täydellisesti. Oletetaan, että jousivoiman lisäksi punnusta hidastaa myös nopeudesta riippuvainen vähäinen voima: $F_\mu = -2\mu \frac{dx}{dt}$ missä $0 < \mu < \sqrt{mk}$ on vakio. Millainen on punnuksen liikerata nyt verrattuna ideaalitalanteeseen? Mitä tapahtuu, kun $t \rightarrow \infty$?

(3 p per kohta)

(Jatkuu seuraavalla sivulla)

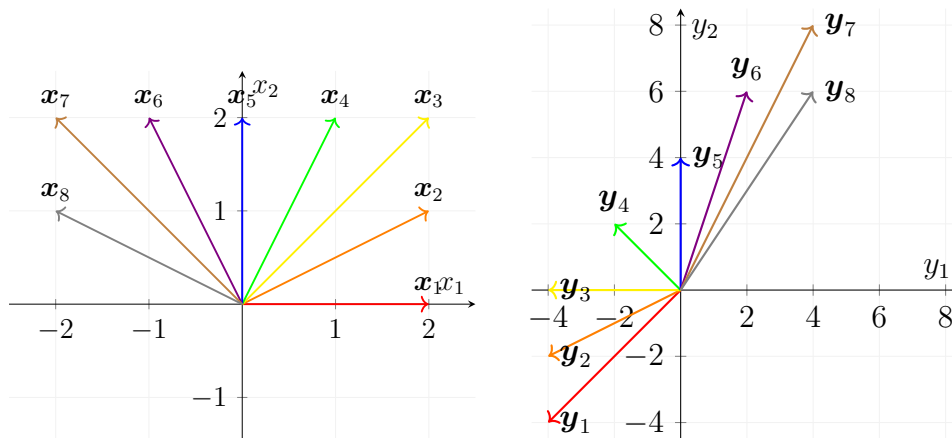
4.

(i) Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot sekä jotakin ominaisarvoa vastaavat kaikki ominaisvektorit. (3 p)

(ii) Alla vasemmanpuoleisessa kuvassa on vektoreita \mathbf{x}_i ja oikeanpuoleisessa kuvassa vektoreita $\mathbf{y}_i = \mathbb{A}\mathbf{x}_i$, jotka on siis saatu edellisistä vektoreista 2×2 -matriisilla \mathbb{A} kertomalla (tietynväristä vektoria \mathbf{x}_i vastaa siis samanvärisen vektorin \mathbf{y}_i). Päättele kuvien perusteella matriisin \mathbb{A} ominaisarvot ja -vektorit. (3 p)



5. Pieneen järveen (tilavuus $V = 2\,000\,000 \text{ m}^3$) laskee joki, jonka virtausnopeus on vakio $r = 100\,000 \frac{\text{m}^3}{\text{kk}}$. Järvestä poistuu vettä samalla nopeudella, ts. tilavuus pysyy vakiona. Järvessä olevan suolan oletetaan olevan tasaisesti jakautunut veeteen.

Joen tuoma suolapitoisuus vaihtelee vuodenaikojen mukaan: pitoisuus on

$$c_{\text{in}}(t) = 4 + 2 \sin(\pi t/6) \quad \left(\frac{\text{mg}}{\text{l}} \right),$$

missä t on aika kuukausina. Ajanhetkellä $t = 0$ järvessä 4 000 kg suolaa.

Olkoon $Q(t)$ järven suolan määrä grammoina ajanhetkellä t (kk).

(i) Muodosta alkuarvotehtävä, joka kuvaa suuretta $Q(t)$. (2 p)

(ii) Ratkaise alkuarvotehtävä. Vihje: $\int e^{at} \sin(bt) dt = \frac{e^{at}(a \sin(bt) - b \cos(bt))}{a^2 + b^2} + C$. (4 p)