BM20A8000 Differentiaaliyhtälöt — Tentti 5.5.2026

Tentaattori: Tomás Soto (tomas.soto@lut.fi)

Tentissä on sallittu kirjallisena materiaalina vain MAOL, BETA, Tekniikan taulukkokirja (Valtanen), Matematiikan taulukkokirja (Valtanen) sekä käsin kirjoitettu, A4-kokoinen kaavakokoelma. Kaavakokoelma ei saa sisältää minkäänlaisia esimerkkitehtäviä. **Kaavakokoelma tulee palauttaa tenttipaperin kanssa**. Laskin ei ole sallittu.

Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Kirjoita selkeästi, ja **muista perustella vastauksesi**.

1. Ratkaise seuraavat differentaaliyhtälöt/alkuarvotehtävät. Millä väleillä ratkaisut on määritelty?

(i) $y' + y^2 = 0$; (ii) $y''(x) - \cos(x) - 3 = 0, \quad \begin{cases} y(1) &= 1, \\ y'(1) &= 1 \end{cases}$

(3 p per kohta).

2. Ovatko seuraavat differentiaaliyhtälöt separoituvia? Ratkaise kaikki separoituvat yhtälöt separoimalla.

(i) $y' = e^x(1+y)$; (ii) $y = e^x(1+y')$; (iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y(x^3-1)+y}{x(y^3-1)+x}$

(2 p per kohta).

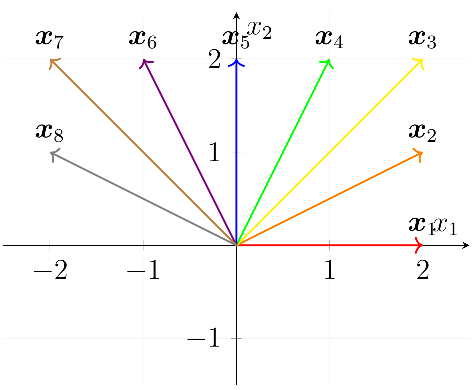
3.

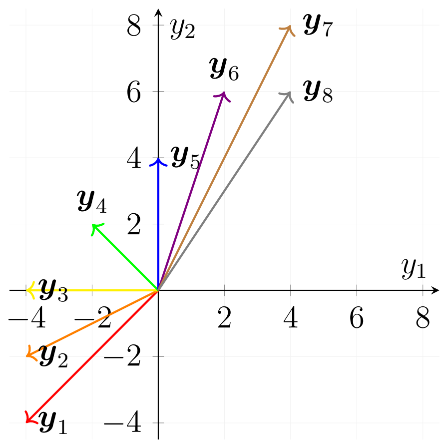
(i) Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot sekä jotakin ominaisarvoa vastaavat kaikki ominaisvektorit. (3 p)

(ii) Alla vasemmanpuoleisessa kuvassa on vektoreita $\boldsymbol{x}_i$ ja oikeanpuoleisessa kuvassa vektoreita $\boldsymbol{y}_i = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_i$, jotka on siis saatu edellisistä vektoreista 2×2 -matriisilla $\mathbb{A}$ kertomalla (tietynväristä vektoria $\boldsymbol{x}_i$ vastaa siis samanvärinen vektori $\boldsymbol{y}_i$). Päättele kuvien perusteella matriisin $\mathbb{A}$ ominaisarvot ja -vektorit. (3 p)





(Jatkuu seuraavalla sivulla)

4. Pieneen järveen (tilavuus $V = 2\,000\,000\,\mathrm{m}^3$) laskee joki, jonka virtausnopeus on vakio $r = 100\,000\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kk}}$. Järvestä poistuu vettä samalla nopeudella, ts. tilavuus pysyy vakiona. Järvessä olevan suolan oletetaan olevan tasaisesti jakautunut veteen.

Joen tuoma suolapitoisuus vaihtelee vuodenaikojen mukaan: pitoisuus on

$$c_{\mathrm{in}}(t) = 4 + 2\sin(\pi t/6) \qquad \left(\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}\right),$$

missä t on aika kuukausina. Ajanhetkellä $t = 0$ järvessä $4\,000\,\mathrm{kg}$ suolaa.

Olkoon $Q(t)$ järven suolan määrä grammoina ajanhetkellä t (kk).

(i) Muodosta alkuarvotehtävä, joka kuvaa suuretta $Q(t)$. (2 p)

(ii) Ratkaise alkuarvotehtävä. *Vihje:* $\int e^{at}\sin(bt)\mathrm{d}t = \frac{e^{at}(a\sin(bt)-b\cos(bt))}{a^2+b^2} + C$. (4 p)

5. Olkoon $\sigma \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan reuna-arvotehtävää

$$y''(t) - \sigma y(t) = 0, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad \begin{cases} y(0) &= 0, \\ y(1) &= 0. \end{cases}$$

Määritä kaikki parametrin σ arvot, joilla tällä reuna-arvotehtävällä on monikäsitteinen ratkaisu.