

BK80A4010 Mekaniikka II / Olli-Pekka Hämäläinen

Tentti 4.5.2026

Sallittu varustus: Laskin (ei mallirajoituksia). Ei kirjallista materiaalia liitteenä olevan kaavakokoelman lisäksi.

Tentti on kaksiosainen:

- **Osa A, joka sisältää 10 helppoa ja lyhyttä kysymystä (jokainen arvoltaan 1p)**
- **Osa B, joka sisältää hieman laajempia kysymyksiä yhteensä 40p arvosta (jokaisen kysymyksen pistearvo mainittu suluissa)**

Opiskelijan on saatava osasta A vähintään 6 pistettä, tai osaa B ei arvostella.

Yleisohjeet:

- **Kirjoita kaikki vastauksesi vastauspaperille – ei kysymyspaperiin!!**
- **Vastaa osan A kysymyksiin vastauspaperin etusivulle**
 - **Osan A vastauksia ei TARVITSE perustella selityksin tai laskuilla – pelkät vastaukset riittävät pisteiden myöntämiseen (paitsi jos kysymys on mielestäsi tulkinnanvarainen; tässä tapauksessa ole hyvä ja selitä, kuinka asian ajattelit)**
 - **Laskutkin ovat toki tervetulleita**
 - **Kirjoita osan A vastauksesi käyttäen TIKKUKIRJAIMIA selkeyden vuoksi**
- **Osan B vastauksissa muista dokumentoida ratkaisusi – mukaan lukien välivaiheet sekä lukuarvojen sijoitukset!**
- **Tehtäviä ei tarvitse ratkaista järjestyksessä; merkitse kuitenkin selkeästi tehtävänumerot**

OSA A

1. Voima $F = 200i + 50j - 100k$ vaikuttaa vektorin $r = 4i + j - 2k$ suunnassa. Mikä on tämän voiman suuruus? (Pyöristettynä lähimpään kokonaislukuun.)

- A) 150 N B) 180 N C) 229 N D) 1050 N

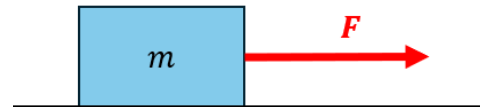
2. Voima $F = 60i - 80j + 50k$ vaikuttaa pisteessä $A = (1,4,5)$. Minkä suuruisen momentin se aiheuttaa pisteeseen $B = (-3,2,4)$? (Pyöristettynä lähimpään kokonaislukuun.)

- A) 425 B) 496 C) 586 D) 724

3. Palloniveltuki muutetaan vapaakappalekuvassa kuinka moneksi (skalaari)tukireaktioksi?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

4. Laatikko ($m = 13 \text{ kg}$) on alun perin levossa, kun siihen kohdistetaan vetävä voima $F = 55 \text{ N}$ oikealle kuvan mukaisesti. Jos lepokitka- ja liikekitkakertoimet ovat vastaavasti 0.4 ja 0.28, kuinka suuri on tuloksena aiheutuva laatikon kiihtyvyys? (Kahden desimaalin tarkkuudella.)



- A) 0.00 m/s^2 B) 0.31 m/s^2 C) 0.51 m/s^2 D) 1.48 m/s^2

5. Olemme määrittäneet yksinkertaiselle mekanismille potentiaalienergiafunktion $V(\theta)$. Milloin mekanismi on tasapainossa?

- A) $\theta = 0$ B) $V(\theta) = 0$ C) $V'(\theta) = 0$ D) $V''(\theta) = 0$

6. Pyöreä metallitanko (halkaisija d) on kiinnitetty seinään ja sitä vedetään voimalla P . Metallin kimmomoduuli on 175 GPa, myötölujuus 320 MPa ja murtolujuus 490 MPa. Vetämisen tuloksena tankoon aiheutuu venymä $450 \cdot 10^{-6}$. Kuinka metalli käyttäytyy – millä jännitys-venymäkäyrän alueella tällöin ollaan?

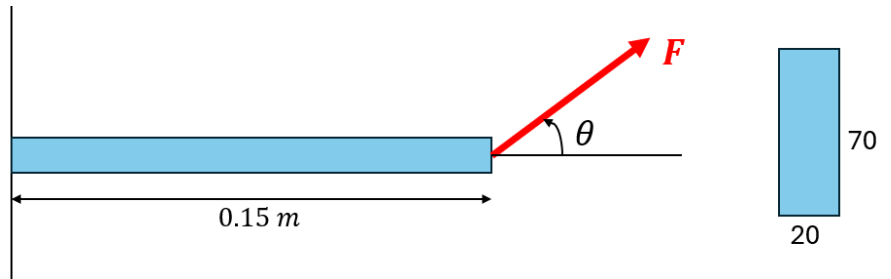
- A) Elastinen alue B) Myötäämisalue
C) Myötölujittumisalue D) Ei voida sanoa tuntematta P :n ja d :n lukuarvoja

7. Pyöreää akselia, jonka halkaisija on 25 mm, kuormitetaan 420 Nm suuruisella vääntömomentilla. Mikä on akseliin syntyvä suurin leikkausjännitys? (Pyöristetynä lähimpään kokonaislukuun.)

- A) 0 MPa (ei leikkausjännitystä) B) 11 MPa C) 17 MPa D) 137 MPa

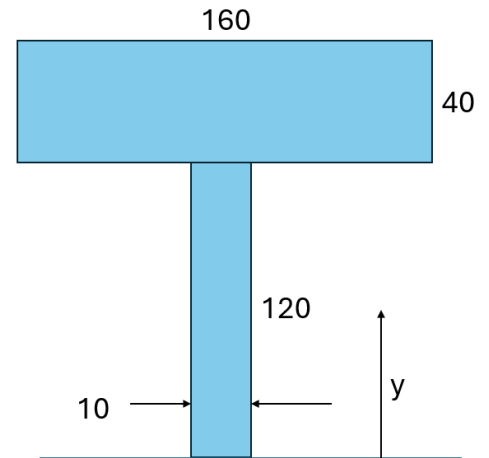
8. Lyhyttä seinään kiinnitettyä palkkia kuormitetaan voimalla $F = 12$ kN, joka vaikuttaa alla vasemmalla olevan kuvan mukaisesti $\theta = 20^\circ$ kulmassa. Palkin poikkileikkaus on esitetty alla oikealla (mitat millimetrejä). Mikä on suurin palkkiin aiheutuva normaalijännitys? (Kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.)

- A) 8.06 MPa B) 37.7 MPa
C) 45.7 MPa D) 110 MPa



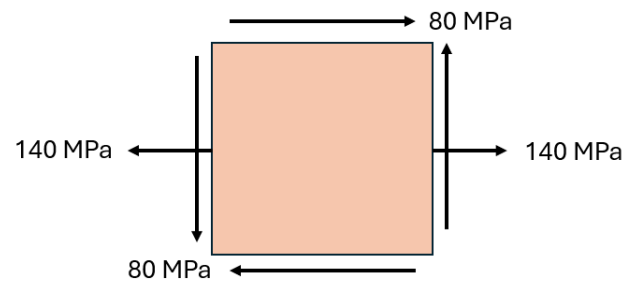
9. Mikä on oikealla puolella esitetyn profiilin neutraaliakselin \bar{y} sijainti? Kaikki mitat ovat millimetrejä. (Pyöristetynä lähimpään kokonaislukuun.)

- A) 80 mm B) 100 mm
C) 112 mm D) 127 mm



10. Rakenteen jännitystila eräässä pisteessä on oikealla olevan kuvan mukainen. Mikä on tässä pisteessä vaikuttava Von Mises-jännitys? (Pyöristetynä lähimpään kokonaislukuun.)

- A) 122 MPa B) 161 MPa
C) 197 MPa D) 394 MPa



OSA B

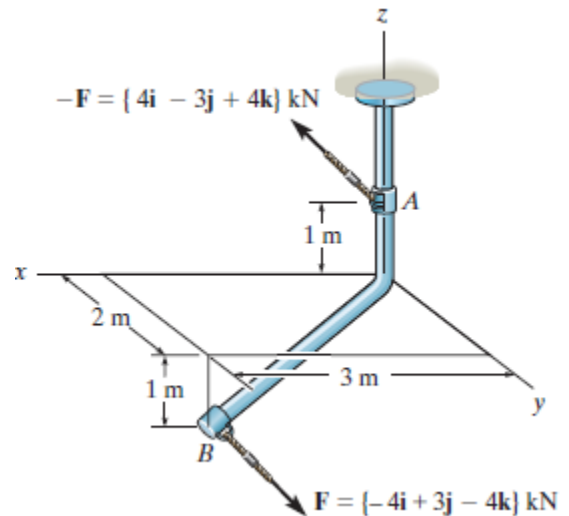
1. Silmukkakalenkki on koordinaatiston origossa. Lenkkiin vaikuttaa kolme voimaa: Voiman 1 suuruus on 600 N ja se suuntautuu pisteeseen $A = (2, -1, 5)$. Voiman 2 suuruus on 380 N ja se suuntautuu pisteeseen $B = (3, 7, -4)$. Voiman 3 suuruus on 220 N ja se suuntautuu kohti pistettä $C = (1, 4, 8)$.

a) Määritä voimat 1-3 vektorimuodossa. Anna vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella. (4p)

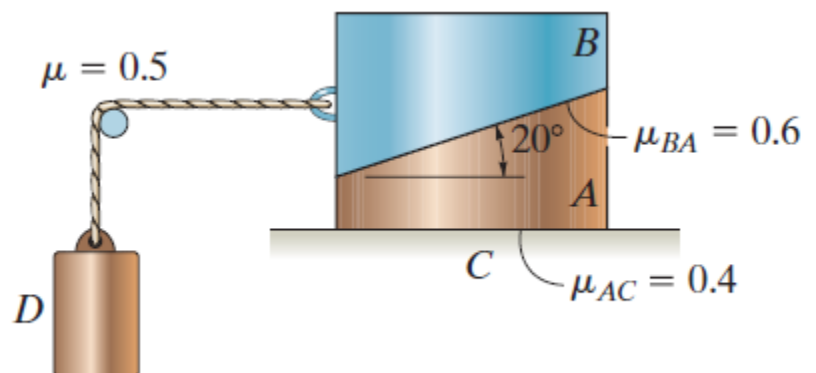
b) Laske näiden ulkoisten voimien resultantin suuruus. (2p)

2. a) Laske kuvan voimaparin tankoon aiheuttama momentti. Anna vastaus karteesisena vektorina ja laske myös momentin suuruus. (3p)

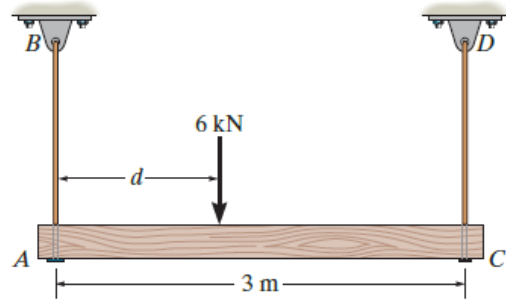
b) Jos tangon halkaisija on 90 mm, laske pisteessä A vaikuttava suurin vääntöjännitys. (3p)



3. Kappaleen A massa on 50 kg ja kappaleen B massa on 30 kg. Määritä kuvan lepokitkakertoimia käyttäen suurin mahdollinen sylinterin D massa siten, että systeemi ei lähde liikkeelle. (6p)



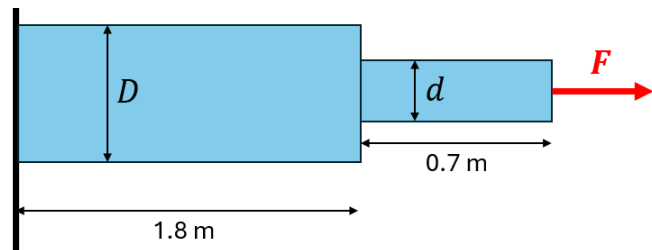
4. a) Palkki on ripustettu tankoihin AB ja CD, joiden poikkileikkauspinta-alat ovat vastaavasti 12 mm^2 ja 8 mm^2 . Määritä kuvan 6 kN suuruisen voiman sijainti d siten, että molemmissa tangoissa vaikuttaa yhtä suuri keskimääräinen normaalijännitys. (4p)



b) 7500 W sähkömoottori pyörittää vetoakselia (halkaisija 35 mm, seinämänpaksuus 4 mm) käyntinopeudella 300 rpm. Mikä on suurin vetoakselissa vaikuttava leikkausjännitys? (4p)

5. a) Sylinterimäinen säiliö, jonka ulkohalkaisija on 1660 mm ja seinämäpaksuus 18 mm, on paineistettu 37 bar paineeseen. Laske säiliön seinämässä vaikuttava Von Mises-jännitys. (3p)

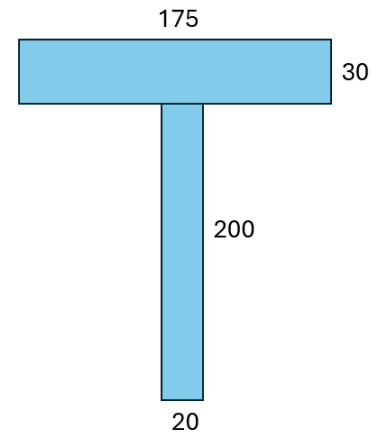
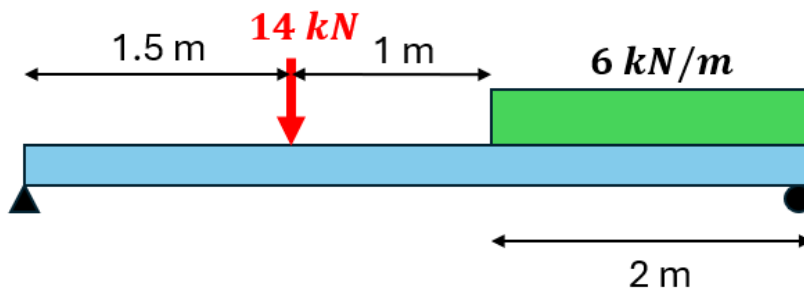
b) Oikeanpuoleisen kuvan pyörötanko ($D = 40 \text{ mm}$, $d = 15 \text{ mm}$) on kiinnitetty seinään ja sitä vedetään $F = 20 \text{ kN}$ suuruisella voimalla. Materiaali on terästä ($E = 210 \text{ GPa}$, $f_y = 355 \text{ MPa}$). Laske tangon kokonaispitenemä millimetreinä. (3p)



6. T-palkkia (poikkileikkauskuva alla oikealla; mitat millimetrejä) kuormitetaan alla vasemmalla olevan kuvan mukaisesti.

a) Laske suurin palkissa vaikuttava normaalijännitys. (5p)

b) Laske suurin palkissa vaikuttava leikkausjännitys. (3p)



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad F_i = F_i \mathbf{u}_v = F_i \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \sum F_i = 0$$

$$\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$F_i = F_i \mathbf{u}_v = F_{i,x}\mathbf{i} + F_{i,y}\mathbf{j} + F_{i,z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\alpha_i = \cos^{-1}\left(\frac{F_{i,x}}{F_i}\right) \quad \beta_i = \cos^{-1}\left(\frac{F_{i,y}}{F_i}\right) \quad \gamma_i = \cos^{-1}\left(\frac{F_{i,z}}{F_i}\right)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \mathbf{n}$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = \sum (r_i \times F_i)$$

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{M}_O$$

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a,x} & u_{a,y} & u_{a,z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_a = M_a \mathbf{u}_a$$

$$\sum F = 0 \quad \sum M_O = 0$$

$$N = F_x$$

$$V = \sqrt{F_y^2 + F_z^2}$$

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

$$T = M_x$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

$$\varphi_s = \tan^{-1} \mu_s$$

$$F_s = \mu_s N$$

$$F_k = \mu_k N$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{l}{2\pi r}\right)$$

$$\varphi_s = \tan^{-1} \mu_s$$

$$M_u = Wr \tan(\theta + \varphi)$$

$$M_{d,s} = Wr \tan(\theta - \varphi)$$

$$M_{d,r} = Wr \tan(\varphi - \theta)$$

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta}$$

$$U_F = \int F ds$$

$$U_M = \int M d\theta$$

$$\delta U_F = F \cdot \delta s$$

$$\delta U_M = M \cdot \delta \theta$$

$$\Sigma \delta U = 0$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_{avg} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

$$\sigma_{true} = \sigma(1 + \varepsilon)$$

$$\varepsilon_{true} = \ln(1 + \varepsilon)$$

$$\varepsilon_f = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}}$$

$$\tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\delta = \frac{PL_0}{EA}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)}{EA(x)} dx$$

$$\delta_T = \alpha \Delta T L_0$$

$$\sigma_T = \alpha \Delta T E$$

$$\sigma_{max} = K \sigma_{avg}$$

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A} \quad \tau_{max} = \frac{Tc}{J} \quad \tau = \frac{T\rho}{J} \quad J = \frac{\pi}{2}c^4 \quad J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4) \quad \begin{matrix} P = T\omega \\ \omega = 2\pi f \end{matrix}$$

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)G} dx \quad \phi = \frac{TL}{JG} \quad \phi = \sum \frac{TL}{JG} \quad \tau_{avg} = \frac{T}{2tA_m} \quad \tau_{max} = K \frac{Tc}{J}$$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} \quad \sigma = -\frac{My}{I} \quad \bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} \quad I_o = \frac{bh^3}{12} \quad I = I_o + Ad^2$$

$$I_o = \frac{\pi r^4}{4} \quad I_{tot} = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad M_z = M \cos \theta \quad M_y = M \sin \theta$$

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad \tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \cdot \tan \theta \quad \sigma_{max} = K \frac{Mc}{I} \quad \tau = \frac{VQ}{It} \quad Q = \sum y_i A_i$$

$$\tau_{max} = 1.5 \frac{V}{A} \quad q = \frac{VQ}{I} \quad q = \tau t \quad \sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

$$\sigma_a = \frac{P}{A} \quad \sigma_b = \frac{My}{I} \quad \sigma_{p1} = \frac{pr}{t} \quad \sigma_{p2} = \frac{pr}{2t} \quad \begin{matrix} \sigma_x = \sigma_{a,x} + \sigma_{b,x} + \sigma_{p,x} \\ \sigma_y = \sigma_{a,y} + \sigma_{b,y} + \sigma_{p,y} \end{matrix}$$

$$\tau_s = \frac{VQ}{It} \quad \tau_t = \frac{T\rho}{J} \quad \tau_{xy} = \tau_s + \tau_t \quad \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{max,abs} = \max\left\{\left|\frac{\sigma_1}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_2}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|\right\}$$

$$\tau_{max,in-plane} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$n = \frac{\sigma_{fail}}{\sigma_{eq}}$$

$$\sigma_{allow} = \frac{\sigma_{fail}}{n}$$

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_{allow}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_T = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|\}$$

$$\sigma_{MNS} = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}$$

Myötää, jos $\sigma_{VM} > f_y$

Myötää, jos $\sigma_T > f_y$

Vaurioituu, jos $\sigma_{MNS} > f_u$