BM20A8601 Tilastomatematiikka I
Tentti 06.05.2026

Tentissä on sallittu käyttää laskinta, liitteinä normaali- ja t-taulukot sekä kaavakokoelma. Muista kirjata välivaiheet näkyviin.

Tehtävä 1

Olet pyytänyt naapuriasi katsomaan huonovointisen huonekasvisi perään, ollessasi matkoilla. Ilman vettä kyseinen kasvi kuolee todennäköisyydellä 0.8. Kasteltuna kuolema tapahtuu todennäköisyydellä 0.15. Olet 90 prosentin varma, että naapurisi muistaa käydä kastelemassa kasvia.

(a) Millä todennäköisyydellä kasvi on elossa, kun palaat lomalta?

(b) Jos kasvi kuitenkin on kuollut, millä todennäköisyydellä naapuri unohti käydä kastelemassa sitä?

Tehtävä 2

Seuraavissa kohdissa, vastauksen lisäksi, kerro myös, miksi kyseinen jakauma on sopiva kuvaamaan kyseisiä tapauksia. Jos jakaumaa ei ole kerrottu, niin päättel,e mitä käytät ja miksi.

(a) Olkoon X autojen määrä minuutissa, jotka ohittavat tietyn tienpätkän klo 8–10 välisenä aikana. Oleta, että X noudattaa Poisson-jakaumaa keskiarvolla 5. Laske todennäköisyys, että havaitaan korkeintaan 4 autoa minuutissa.

(b) Radion toimintaikä on eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla $\lambda = 18$. Jos Jorma ostaa käytetyn radion, millä todennäköisyydellä se toimii vielä seuraavat 10 vuotta?

(c) Monivalintakokeessa on 10 kysymystä, joista jokaisessa on 4 vastausvaihtoehtoa, joista yksi on oikein. Opiskelija saa kokeen läpi, jos hän saa vähintään 8 oikein. Lasketaan todennäköisyys, että opiskelija, joka arvaa kaikki vastaukset sattumanvaraisesti, saa kokeen läpi.

Tehtävä 3

Uuden tyyppistä kranaatinheittimen ammusta tutkitaan. Havaitaan seuraavat kantamat 20:lle ammukselle (metriä): 2100 1984 2072 1898 1950 1992 2096 2103 2043 2218 2244 2206 2210 2152 1962 2007 2018 2106 1938 1956.

Oletetaan, että kantama on normaalijakautunut. Laske (a) 95 prosentin ja (b) 99 prosentin luottamusvälit kantaman keskiarvolle.

Tehtävä 4

Laboratoriohiirien yhdyskunta koostuu useista tuhansista hiiristä. Kaikkien hiirien painon keskiarvo on 32 grammaa ja keskihajonta 4 grammaa. Tutkija pyytää laboratorioassistenttia valitsemaan 25 hiirtä koetta varten. Ennen kokeen suorittamista tutkija päättää punnita valitut hiiret varmistaakseen, että assistentti on todella valinnut hiiret satunnaisesti. On mahdollista, että valinnassa on ollut jokin tiedostamaton harha (esimerkiksi valitut hiiret ovat olleet hitaampia ja siksi helppoja poimia, mutta tämä voi kertoa myös kyseisten yksilöiden yleisistä ominaisuuksista). Jos kyseisten 25 hiiren painon otoskeskiarvo on 30.4 g, voidaanko näyttää, että 5 prosentin merkitsevyystasolla hiiret olivat todellakin valittu satunnaisesti?

Tehtävä 5

Eräs komponentti on sähkölaitteen toiminnalle kriittinen ja se täytyy vaihtaa välittömästi vikaantuessa. Jos tämän komponentin keskimääräinen toiminta-aika on 100 tuntia keskihajonnalla 30 tuntia, montako komponenttia pitää varastoida vaihtoa varten, jotta sähkölaitetta voidaan käyttää yhtäjakoisesti seuraavat 2000 tuntia todennäköisyydellä 0.95?

Standard normal table

The table below contains approximate values of the cumulative distribution function of the standard normal distribution

$$\Phi(x) = F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Student's t-distribution table

The table below contains approximate values of the quantile function

$$F_{t,n-1}^{-1}(p)$$

where $F_{t,n-1}$ is the cumulative distribution function for Student's t-distribution with degrees of freedom $n-1$. For example, $P(T \leq 1.2497\ldots) = p$ when $n-1=3$, $p=0.85$ and T has the t-distribution with degrees of freedom $n-1$.

	p									
$n-1$	0.5000	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950	0.9990
1	0.0000	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	318.3088
2	0.0000	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.3271
3	0.0000	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.2145
4	0.0000	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732
5	0.0000	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934
6	0.0000	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076
7	0.0000	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853
8	0.0000	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008
9	0.0000	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968
10	0.0000	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437
11	0.0000	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247
12	0.0000	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296
13	0.0000	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520
14	0.0000	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874
15	0.0000	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328
16	0.0000	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862
17	0.0000	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458
18	0.0000	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105
19	0.0000	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794
20	0.0000	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518
21	0.0000	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272
22	0.0000	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050
23	0.0000	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850
24	0.0000	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668
25	0.0000	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502
26	0.0000	0.6840	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350
27	0.0000	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210
28	0.0000	0.6834	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082
29	0.0000	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962
30	0.0000	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852
31	0.0000	0.6825	0.8534	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440	3.3749
32	0.0000	0.6822	0.8530	1.0535	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385	3.3653
33	0.0000	0.6820	0.8526	1.0530	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333	3.3563
34	0.0000	0.6818	0.8523	1.0525	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.3479
35	0.0000	0.6816	0.8520	1.0520	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	3.3400
36	0.0000	0.6814	0.8517	1.0516	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	3.3326
37	0.0000	0.6812	0.8514	1.0512	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154	3.3256

Todennäköisyyden ja tilastotieteen kaavakokoelma

Probability & Statistics — Cheat Sheet

Todennäköisyyden laskusäännöt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \varnothing$$
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
$$P(A) \le P(B), \quad \text{kun } A \subseteq B$$
$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Ehdollinen tn. & Bayes

$$P(E \mid A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$
$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A)}$$

Riippumattomuus: $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

Odotusarvo ja varianssi

Odotusarvo (diskreetti / jatkuva):

$$E(X) = \sum_{\nu} \nu \cdot P(X = \nu)$$
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Kahden muuttujan funktio:

$$E\big(g(L,S)\big) = \sum_{l} \sum_{s} g(l,s)\, f(l,s)$$

Varianssi (määritelmä):

$$\mathrm{Var}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big]$$

Varianssi (laskentakaava):

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \big[E(X)\big]^2$$

Keskihajonta: $\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Lineaarisuussäännöt:

$$E(aX + b) = a\, E(X) + b$$
$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\, \mathrm{Var}(X)$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Jos X, Y riippumattomia:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Kovarianssi ja korrelaatio

Diskreetti:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{x} \sum_{y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)\, f(x,y)$$

Jatkuva:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \iint (x - \mu_X)(y - \mu_Y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

Laskentakaava:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y)$$

Otoskorrelaatio:

$$r(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_j (x_j - \bar{x})^2 \, \sum_j (y_j - \bar{y})^2}}$$

Reunajakaumat (marginaalit)

Diskreetit satunnaismuuttujat X, Y yht. pmf $p_{X,Y}(x,y)$:

$$p_X(x) = \sum_{y} p_{X,Y}(x,y)$$
$$p_Y(y) = \sum_{x} p_{X,Y}(x,y)$$

Jakaumat

Jatkuva tasajakauma $X \sim \mathrm{Uniform}(a,b)$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < t < b \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{t-a}{b-a}, & a \le t \le b \\ 1, & t > b \end{cases}$$

$$E(X) = \tfrac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{(b-a)^2}{12}$$

Eksponenttijakauma $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \tfrac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{1}{\lambda^2}$$

Normaalijakauma $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

$$E(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Bernoulli $X \sim \mathrm{Ber}(p)$

$$f(k) = \begin{cases} 1-p, & k = 0 \\ p, & k = 1 \end{cases} \quad E(X) = p,\ \mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

Binomijakauma $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$E(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Geometrinen $X \sim \mathrm{Geom}(p)$

$$f(k) = (1-p)^k p, \quad F(k) = 1 - (1-p)^{k+1}$$

$$E(X) = \tfrac{1}{p}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{1-p}{p^2}$$

Poisson $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$

$$f(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Z-arvo ja luottamusväli

Standardointi:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Normitettu arvo (tunnettu σ):

$$NV(\vec{X}) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

T-suure (tuntematon σ):

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Luottamusväli merkitsevyystasolla α:

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{tai} \quad \bar{X} \pm t_{\alpha/2,\,n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Otossuureet

Otoskeskiarvo:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Otosvarianssi (harhaton):

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Otoskeskihajonta: $s = \sqrt{s^2}$

Keskeinen raja-arvolause (CLT)

Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat i.i.d. ja $E(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty$$

Hyödyllisiä sääntöjä

Komplementtisääntö: $P(A^c) = 1 - P(A)$
De Morganin lait:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$