

BM20A8101 Integraalilaskenta

Tentti 28.4.2026

Tentissä on sallittu kirjallisesta materiaalista vain MAOL, BETA, Tekniikan taulukkokirja (Valtanen), Matematiikan taulukkokirja (Valtanen) sekä käsin kirjoitettu, A4-kokoinen kaavakokoelma.

Laskin ei ole sallittu.

Vastaa jokaiseen tehtävään.

Integraalit tulee laskea loppuun asti, ellei toisin mainita.

1. (a) Laske

$$\int_{-1}^1 |x^2 - x| dx. \quad (3p)$$

- (b) Laske

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$$

käyttäen sijoitusta $x = t + 1$. (3p)

2. (a) Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ sekä suorien $y = 0$ ja $x = 1$ rajaama alue pyörähtää x -akselin ympäri. Laske muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuus. (3p)

- (b) Neljä metriä pitkä ohut metallitanko sijaitsee x -akselilla välillä $x \in [0, 4]$. Sen tiheys on

$$\rho(x) = 1 + \sqrt{x}, \quad x \in [0, 4],$$

missä x mitataan metreissä. Määritä tangon massakeskipisteen x -koordinaatti. (3p)

3. (a) Laske x -akselin ja parametrisen käyrän

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t^3,$$

väliin jäävän alueen pinta-ala, kun $t \in [0, 2]$. (3p)

- (b) Robotti liikkuu käyrää pitkin, jonka parametriesitys on

$$x(t) = t \cos(t), \quad y(t) = t \sin(t).$$

Määritä robotin kulkeman matkan pituus välillä $t \in [0, 3]$. *Kohdassa (b) riittää muodostaa integraali ja sieventää se mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon; arvoa ei tarvitse laskea.* (3p)

4. Radioaktiivisen atomin elinaikaa T kuvaa tiheysfunktio

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{jos } t \geq 0 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Todennäköisyys, että elinaika T on välillä $[a, b]$, saadaan kaavasta $P(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(t) dt$.

- (a) Laske todennäköisyys $P(0 \leq T \leq 1)$. (3p)

- (b) Mikä on tämän atomin puoliintumisaika (eli aika $m \geq 0$, jolle $P(0 \leq T \leq m) = \frac{1}{2}$)? (3p)

5. Olkoon $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ kolmio tasossa \mathbb{R}^2 ja määritellään funktio $f(x, y) = x^2 + 2xy$. Laske

$$\iint_K f(x, y) dA. \quad (6p)$$