

# BM20A7901 Differentiaalilaskenta

## Tentti 23.3.2026

Tentissä on sallittu kirjallisesta materiaalista vain MAOL, BETA, Tekniikan taulukkokirja (Valtananen), Matematiikan taulukkokirja (Valtananen) sekä käsin kirjoitettu, A4-kokoinen kaavakokoelma.

Laskin ei ole sallittu.

Vastaa jokaiseen tehtävään.

1. Määritä funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

globaalit minimi- ja maksimiarvot. Ilmoita myös, millä  $x$ :n arvoilla globaalit ääriarvot saavutetaan. (6p)

2. Olkoon  $f(x) = e^{-2x}$ .

(a) Muodosta 1. asteen, 2. asteen ja 3. asteen Taylorin polynomit funktiolle  $f$  pisteen  $x = 0$  ympärillä. (3p)

(b) Oriton ympärille kehitetyn  $n$ :nnen asteen Taylorin polynomin  $P_n(x)$  virhekaava on

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{missä } x \in \mathbb{R} \text{ ja } c_x \in (\min\{0, x\}, \max\{0, x\}).$$

Tarkastele kohdassa (a) muodostamasi 3. asteen Taylorin polynomin arvoa kohdassa  $x = 1$ . Osoita, että

$$|f(1) - P_3(1)| \leq \frac{2}{3}. \quad (3p)$$

3. (a) Etsi hyperbelin

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

pisteen  $(\sqrt{5}, \frac{3}{2})$  kautta kulkevan tangenttisuoran yhtälö. (3p)

(b) Olkoon  $f(x, y) = y \cos(x)$ . Määritä funktion  $f$  kuvaajan tangenttitason yhtälö pisteessä  $(0, 0, f(0, 0))$ . (3p)

4. Käyttämällä Lagrangen kertoimia, määritä funktion

$$f(x, y) = xy$$

suurin ja pienin arvo joukossa  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Ilmoita myös, missä pisteissä  $(x, y)$  nämä ääriarvot saavutetaan. (6p)

5. Käyttämällä pienimmän neliösumman menetelmää, määritä sellaisen suoran yhtälö  $y = ax + b$ , joka tuottaa parhaimman sovituksen mittapisteisiin

$$(0, 0), (1, 1), (1, 2).$$

Tässä yhteydessä "paras sovitus" tarkoittaa, että sovitussuora minimoi residuaalien neliöiden summan. (6p)