BM20A4102 Vektorianalyysi, Syksy 2025
Tentti 24.3.2026

Kokeessa saa olla mukana kirjoitusvälineet sekä kuvallinen henkilöllisyystodistus. Kokeessa ei sallita omia muistiinpanoja, luentomonisteita, kurssikirjoja, taulukkokirjoja, puhelimia, tietokoneita eikä laskimia. Vastaa kaikkiin viiteen tehtävään. Perustele jokainen vastauksesi huolellisesti. Muista laittaa nimi kaikkiin vastauspapereihin.

Tehtävä 1

(a) Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Anna funktion f gradientin määritelmä.

(b) Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_3, x_2^2, \sin x_1)$. Laske derivaatan $Df(\pi/2, 1, 0)$ matriisiesitys.

(c) Olkoon $D := [0,1] \times [0,1]$. Tarkastellaan kuvausta $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := 2e^{x-y}$. Laske integraalin $\int_D g(x,y)dxdy$ arvo.

Perustele jokainen vastauksesi huolellisesti.

Tehtävä 2

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x_2^2 - x_1}$. Anna sellainen polynomi $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolle pätee $\frac{|f(x)-p(x)|}{\|x\|^2} \to 0$ kun $x \to (0,0)$. Perustele vastauksesi huolellisesti.

Tehtävä 3

Tarkastellaan pintaa $S := \{(\cos(\alpha), \sin(\alpha), z) \in \mathbb{R}^3 : z \in (-1,1), \alpha \in (0,\pi)\}$ parametrisaatiolla $r : (0,\pi) \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3$, $r(\alpha, z) := (\cos(\alpha), \sin(\alpha), z)$.

Anna pinnan S pinta-alan määritelmä käyttäen annettua parametrisaatiota. Laske pinta-alan tarkka arvo.

Perustele vastauksesi huolellisesti.

Tehtävä 4

Olkoon $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4,\ y > 0\}$. Laske integraalin $\int_U \|(x,y)\|dxdy$ arvo.

Perustele vastauksesi huolellisesti.

Tehtävä 5

Olkoon $R > 0$. Johda R-säteisen ympyrän kehän pituudelle L kaava $L = 2\pi R$.

Perustele vastauksesi huolellisesti.

Kaavoja:
$v \cdot w = \sum_{j=1}^n v_j w_j$,
$v \times w = (\ v_2w_3 - v_3w_2\ ,\ v_3w_1 - v_1w_3\ ,\ v_1w_2 - v_2w_1\ )$,
$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$,
$f(a+h) = f(a) + \left[\sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_l=1}^n h_{j_1} \cdots h_{j_l} \partial_{j_l} \cdots \partial_{j_1} f(a)\right] + \|h\|^k R(h)$,
$\mathrm{div}(F) = \sum_{j=1}^n \partial_j F_j$,
$\mathrm{curl}(F) = (\ \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2\ ,\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3\ ,\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1\ )$,
$\Delta f = \mathrm{div} \nabla f$.