

**BK80A4000 Mekaniikka I / Olli-Pekka Hämäläinen**

**Tentti 9.3.2026**

**Sallittu varustus: Laskin (ei mallirajoituksia). Ei kirjallista materiaalia liitteenä olevan kaavakokoelman lisäksi.**

**Tentti on kaksiosainen:**

- **Osa A, joka sisältää 10 helppoa ja lyhyttä kysymystä (jokainen arvoltaan 1p)**
- **Osa B, joka sisältää hieman laajempia kysymyksiä yhteensä 40p arvosta (jokaisen kysymyksen pistearvo mainittu suluissa)**

**Opiskelijan on saatava osasta A vähintään 6 pistettä, tai osaa B ei arvostella.**

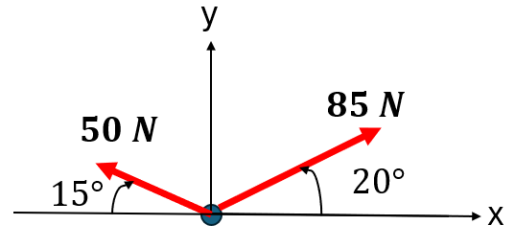
**Yleisohjeet:**

- **Kirjoita kaikki vastauksesi vastauspaperille – ei kysymyspaperiin!!**
- **Vastaa osan A kysymyksiin vastauspaperin etusivulle**
  - **Osan A vastauksia ei tarvitse perustella selityksin tai laskuilla – pelkät vastaukset riittävät pisteiden myöntämiseen (paitsi jos kysymys on mielestäsi tulkinnanvarainen; tässä tapauksessa ole hyvä ja selitä, kuinka asian ajattelit)**
  - **Kirjoita osan A vastauksesi käyttäen TIKKUKIRJAIMIA selkeyden vuoksi**
- **Tehtäviä ei tarvitse ratkaista järjestyksessä; merkitse kuitenkin selkeästi tehtävänumerot**

## Osa A

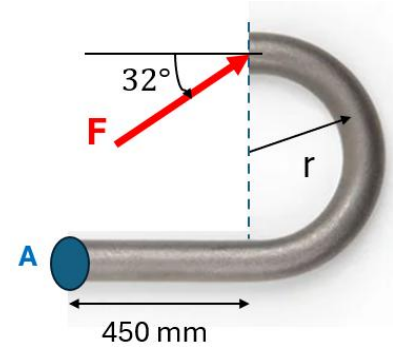
1. Mikä on oikeanpuoleisen kuvan partikkeliin aiheutuvan resultanttivoiman suuruus?

- A) 53 N    B) 74 N    C) 129 N    D) 135 N



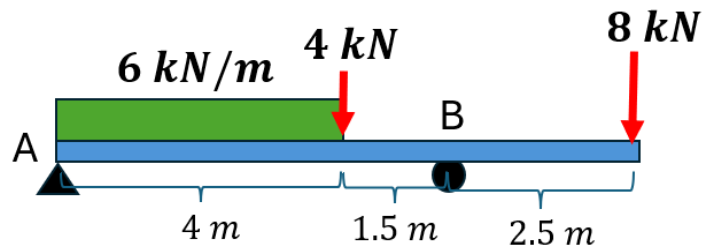
2. Voima  $F = 600$  N ja koukun säde on  $r = 300$  mm. Kuinka suuren momentin tämä voima aiheuttaa pisteeseen A?

- A) 38 Nm    B) 162 Nm    C) 238 Nm    D) 448 Nm



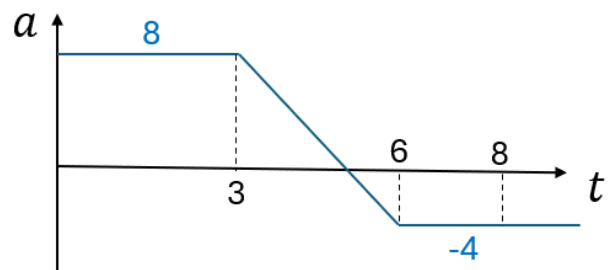
3. Kuinka suuri on pisteessä B vaikuttava tukivoima?

- A) 12.7 kN    B) 13.5 kN  
C) 23.3 kN    D) 28.3 kN



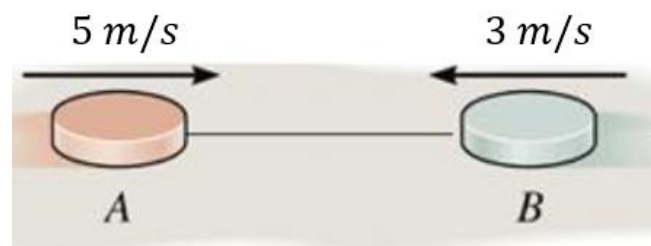
4. Oikealla on auton liikettä esittävä a-t-kuvaaja (SI-yksiköt). Mikä on auton vauhti hetkellä  $t = 8$  s?

- A) 0 m/s    B) 10 m/s  
C) 22 m/s    D) 42 m/s



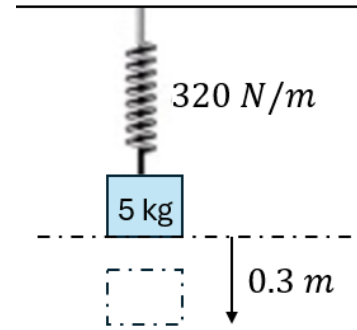
5. Kiekon A massa on 2 kg ja kiekon B massa on 1 kg. Kiekot liukuvat pitkin kitkatonta tasoa ja törmäävät kohtisuorasti toisiinsa. Jos sysäyskerroin on 0.5, mikä on kiekon A vauhti törmäyksen jälkeen?

- A) 1 m/s    B) 3 m/s  
C) 3.5 m/s    D) 4 m/s



6. Jouseen ripustettu massa on oikeanpuoleisessa kuvassa tasapainossa. Tämän jälkeen sitä poikkeutetaan 0.3 m tasapainoasemastaan alaspäin ja massa päästetään värähtelemään. Mikä on syntyvän värähtelyn differentiaaliyhtälö?

- A)  $5\ddot{x} + 320x = 0$                       B)  $5\ddot{x} + 64\dot{x} + 320x = 0$   
 C)  $5\ddot{x} + 320x = 0.3 \sin(8t)$                       D)  $5\ddot{x} + 320x = 96 \sin(8t)$

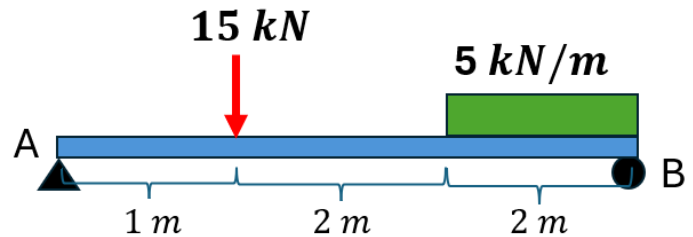


7. Yksinkertaisen ristikon sauvat kykenevät kantamaan vain... millaisia voimia?

- A) Aksiaalivoimia      B) Gravitaatiovoimia      C) Leikkausvoimia      D) Tangentiaalivoimia

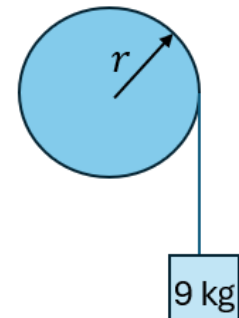
8. Mikä on oikeanpuoleisen kuvan palkissa vaikuttava itseisarvoltaan suurin sisäinen taivutusmomentti ( $|M_{max}|$ )?

- A) 14 kNm                      B) 25 kNm  
 C) 55 kNm                      D) 70 kNm



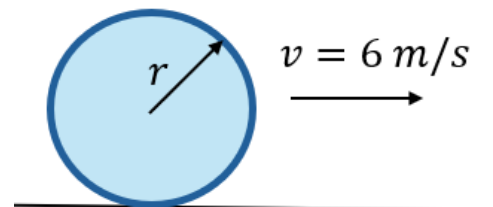
9. Köysi on kiedottu kiekon ( $r = 0.4$  m, massa 60 kg) ympärille. Kiekko on nivelöity niveltapilla keskikohdastaan siten, että se pysyy paikallaan. Tämän jälkeen köyden vapaaseen päähän kiinnitetään palikka ( $m = 9$  kg), joka päästetään vapaaksi. Kuinka suuri on tästä aiheutuva kiekon kulmakiintyyvyys?

- A)  $3.7 \text{ rad/s}^2$       B)  $5.7 \text{ rad/s}^2$       C)  $7.4 \text{ rad/s}^2$       D)  $24.5 \text{ rad/s}^2$



10. Ontto pallo ( $m = 5$  kg) vierii luistamatta pitkin vaakasuoraa tasoa lineaarisella nopeudella 6 m/s. Kuinka suuri on pallon liike-energia?

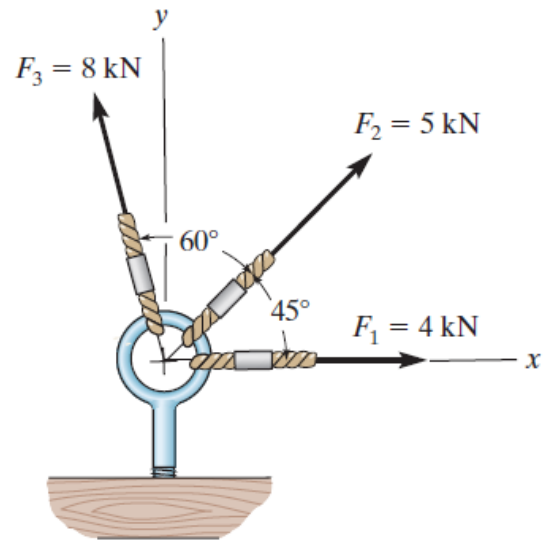
- A) 60 J                      B) 90 J  
 C) 150 J                      D) 210 J



(Osa B alkaa seuraavalta sivulta)

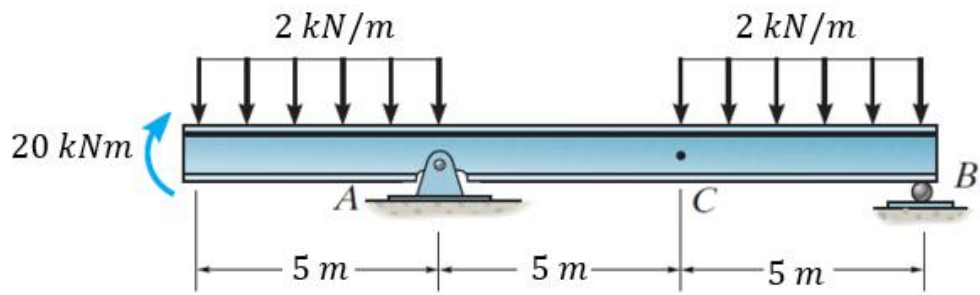
## Osa B

1. Määritä ulkoisen resultanttivoiman suuruus ja sen suuntakulma, määritettynä vastapäivään positiiviselta x-akselilta. (5p)



2. a) Piirrä alla olevan palkin VKK ja laske sen tukireaktiot. (3p)

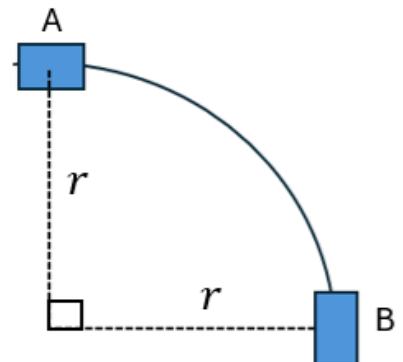
b) Piirrä palkille leikkausvoima- ja momenttikuvaajat. (4p)



3. Auto (massa 1700 kg) lähtee liikkeelle pisteestä A ja alkaa kiihdyttää tasaisella tiellä kiihtyvyydellä  $a(s) = 0.2s$  pitkin kuvan tieosuutta. Kaarteen säde on  $r = 30$  m. (Kuva yläpuolelta.)

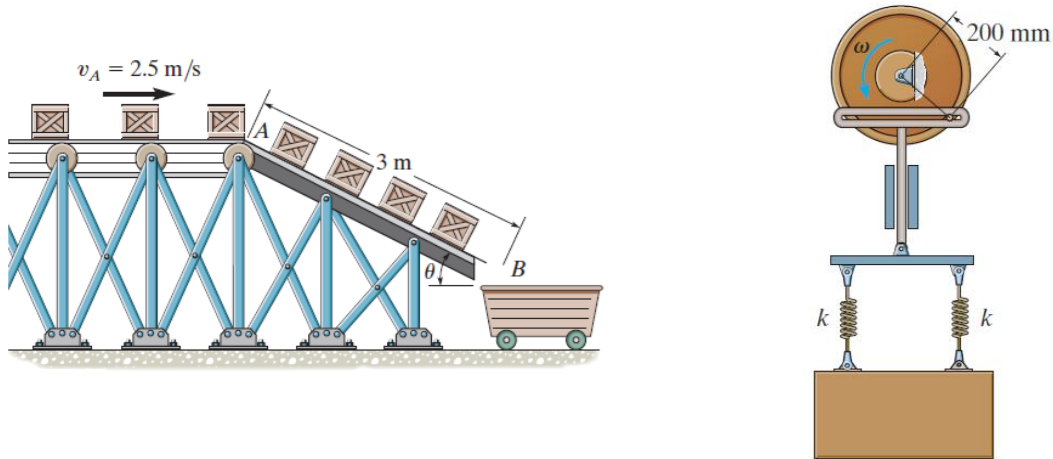
a) Mikä on auton vauhti ja kokonaiskiihtyvyys pisteessä B? (5p)

b) Mikä on sen kitkavoiman, joka yrittää pitää auton tiellä, suuruus pisteessä B? (2p)



4. a) Hihnakuljetin tuo jokaisen 12 kg laatikon rampin alkupisteeseen A siten, että laatikon alkunopeus rampilla on  $v_A = 2.5 \text{ m/s}$ , suoraan rampin suuntaisesti. Jos rampin kaltevuuskulma on  $\theta = 18^\circ$ , laske mikä on rampin suurin mahdollinen liikekitkakerroin  $\mu_k$  siten, että laatikot vielä liukuvat rampilta pois pisteessä B ja putoavat vaunuun. (Kuva tilanteesta alla vasemmalla.) (5p)

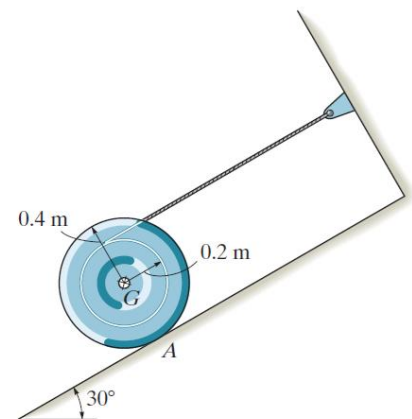
b) Jousisysteemi on kiinnitetty luistiin, joka värähtelee pystysuunnassa vauhtipyörän pyöriessä vakioikulmanopeudella  $\omega = 6 \text{ rad/s}$ . Kummankin jousen jousivakio on  $k = 2500 \text{ N/m}$ . Palikan (jousten alla) massa on 50 kg. Mikä on syntyvän vakaan tilan värähtelyn amplitudi? Jätä huomiotta systeemin muiden osien massa. (Kuva tilanteesta alla oikealla.) (4p)



5. Massaltaan 20-grammainen luoti ammutaan nopeudella 400 m/s levossa olevaan 2 kg palikkaan (luoti jää sisälle). Määritä, kuinka kauan ja kuinka pitkälle palikka osuman jälkeen liikuu, kunnes se pysähtyy. Palikan ja tason välinen liikekitkakerroin on  $\mu_k = 0.2$ . (6p)



6. 100 kg köysirullaa pidetään paikallaan kaltevalla tasolla. Rullan ja tason välinen liikekitkakerroin on  $\mu_k = 0.1$ . Määritä rullan kulmanopeus hetkellä  $t = 4 \text{ s}$  mitattuna siitä hetkestä, jolloin rulla vapautetaan liikkeelle (köysi pysyy siis kiinnitettynä seinään; köysi vain alkaa purkautua rullalta). Rullan hitaussäde sen massakeskipisteen suhteen on  $k_G = 0.25 \text{ m}$ . (6p)



$$\sum F = ma \quad F_R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} \quad \theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{\sum F_y}{\sum F_x}\right) \quad M = Fd$$

Jakautuneet kuormitukset: Tasainen  $F_R = wL, \quad d = L/2$   
 Kolmio  $F_R = \frac{wL}{2}, \quad d = L/3$   
 Puolisuunnikas  $F_R = \frac{L(w_A+w_B)}{2}, \quad d = \frac{L(w_A+2w_B)}{3(w_A+w_B)}$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad a ds = v dv \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \theta_v = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \quad \theta_a = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_c t^2 \quad v = v_0 + a_c t \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \rho = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|} \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \sum F_r = ma_r$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\omega)^2} \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \quad a_r = \ddot{r} - r\omega^2 \quad a_\theta = r\alpha + 2\dot{r}\omega \quad \sum F_\theta = ma_\theta$$

$$\sum F = ma \quad F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad F_\mu = \mu N \quad \sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_t = ma_t \quad \sum F_n = ma_n$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}\right) \quad \psi = \tan^{-1}\left(r \frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta ds \quad U_{1-2} = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) \quad T_1 + \sum U_{1-2} = T_2 \quad \sum T_1 + \sum U_{1-2} = \sum T_2$$

$$P = \frac{dU}{dt} \quad P = Fv \quad \epsilon = \frac{\text{Power output}}{\text{Power input}} \quad \sum T_1 + \sum v_1 = \sum T_2 + \sum v_2 \quad L = mv$$

$$mv_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F dt = mv_2 \quad L_1 + \sum I = L_2 \quad \sum m_i v_{i,1} + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_i dt = \sum m_i v_{i,2}$$

$$m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \quad (H_O)_z = (d)(mv) \quad \sum M_O = \dot{H}_O$$

$$(H_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = (H_O)_2$$

$$x(t) = A \sin(pt) + B \cos(pt) \quad x(t) = C \sin(pt + \varphi) \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\ddot{x} + p^2x = 0 \quad p = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \tau = \frac{2\pi}{p} \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$c_c = 2mp$$

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$x = (A + Bt)e^{-pt}$$

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$x = D \left[ e^{-\left(\frac{c}{2m}t\right)} \sin(p_d t + \phi) \right],$$

$$p_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = p \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2},$$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{p_d}$$

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$x = x_c + x_p = A \sin pt + B \cos pt + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \sin \omega t.$$

$$x_p = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \sin \omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t.$$

$$x(t) = x_c + x_p$$

$$x_p = C' \sin(\omega t + \phi')$$

$$C' = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{\omega}{p}\right)\right]^2}}$$

$$\phi' = \tan^{-1} \left[ \frac{2\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{\omega}{p}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \right]$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -w(x) \quad \frac{dM}{dx} = V(x)$$

$$\sum M_O = 0$$

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

$$v_B = v_A$$

$$a_B = a_A$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$v = \omega r \quad a_t = \alpha r$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$v_{B/A} = \omega r_{B/A}$$

$$v_{B/A,x} = -\omega r_{B/A,y}$$

$$v_{B/A,y} = \omega r_{B/A,x}$$

$$a_B = a_A + (a_{B/A})_t + (a_{B/A})_n$$

$$(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$$

$$(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$$

Kappaleen muoto	Hitausmomentti
Partikkeli narussa (narun pituus $r$ )	$mr^2$
Kiekko (säde $r$ )	$\frac{1}{2}mr^2$
Keskipisteestä kiinnitetty sauva (pituus $l$ )	$\frac{1}{12}ml^2$
Päästä kiinnitetty sauva (pituus $l$ )	$\frac{1}{3}ml^2$
Umpinainen pallo (säde $r$ )	$\frac{2}{5}mr^2$
Ontto pallo (säde $r$ )	$\frac{2}{3}mr^2$
Vapaa muoto (hitaussäde $r_G$ )	$mr_G^2$

$$\mathbf{M} = I\alpha$$

$$I = \int_m r^2 dm$$

$$\begin{cases} \sum F_x = m(a_G)_x \\ \sum F_y = m(a_G)_y \\ \sum M_G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_n = m(a_G)_n = m\omega^2\rho \\ \sum F_t = m(a_G)_t = m\alpha\rho \\ \sum M_G = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_R \quad \mathbf{F}_\mu = \mu_k \mathbf{N} \quad \sum \mathbf{M}_P = \sum (\mathcal{M}_k)_P$$

$$\begin{cases} \sum F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \sum F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \sum M_G = I_G \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = m(a_G)_x \\ \sum F_y = m(a_G)_y \\ \sum M_G = I_G \alpha \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 \quad T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 \quad T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad U_F = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad U_M = \int \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G \quad \mathbf{H} = I_G\boldsymbol{\omega} \quad \begin{matrix} \mathbf{L} = m\mathbf{v}_G \\ \mathbf{H}_G = I_G\boldsymbol{\omega} \end{matrix} \quad \mathbf{H}_O = I_O\boldsymbol{\omega} \quad I_O = I_G + mr_G^2 \quad \mathbf{H}_O = I_G\boldsymbol{\omega} + d m\mathbf{v}_G$$

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \quad I_G\boldsymbol{\omega}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_G dt = I_G\boldsymbol{\omega}_2$$