

Tentti 26.3.2026

Ratkaise alla olevat tehtävät. Sallittu varustus: kirjoitusvälineet, funktiolaskin, oheinen kaavakokoelma.

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt/epäyhtälöt.

- a) $17 - 8x > -15 - 3x$ (3p) b) $(4x - 2)(3 + x) > (4x + 2)(3 - x)$ (4p)
- c) $15 \cdot 4^{3x-2} = 89\,400$ (4p) d) $\log_2(3x) + \log_2(4x) = 7$ (4p)

2. a) Pikaisen gallupin perusteella 47 %:lla opiskelijoista on Netflix-tilaus ja 43 %:lla opiskelijoista on Spotify-tilaus. Toisaalta 38 % opiskelijoista vastasi, ettei heillä ole kumpaakaan palvelua käytössä.

- i) Kuinka suuri osa opiskelijoista tilaa kumpaakin palvelua? (3p)
- ii) Jos opiskelijalla on Netflix-tilaus, niin kuinka suurella todennäköisyydellä hänellä ei ole Spotifyä? (3p)

b) Jaska heittää kolikolla viisi kertaa kruunaa ja klaavaa. Millä todennäköisyydellä hän saa tasan kolme kertaa klaavan? (3p)

c) Kuinka monta termiä on lukujonossa 694, 661, 628, ... jos sen jäsenten summa on -8692 ? (5p)

3. a) Derivoi seuraavat funktiot (3p/kohta, yht. 9p). Tuloksia ei tarvitse sieventää, kunhan on derivoitu.

i) $s(x) = \frac{9x^3 - 4x}{5x - 1}$ ii) $k(x) = (2x^3 + 6)^4(8x^4 - 7x - 2)$ iii) $m(x) = 8\sqrt{x} - 15e^{4x} + \frac{6}{x}$

b) Integroi seuraavat funktiot (3p/kohta, yht. 9p). Kohtien a ja b tuloksia ei tarvitse sieventää.

i) $v(x) = 15x^4 + 6x^2 - \frac{19}{x}$ ii) $r(x) = 4x\sqrt{6x^2 + 25}$ iii) $\int_1^4 2x^3 - 4x^2 - 5 \, dx$

4. a) Hahmottele funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^2 - 11x + 20$ laajennettu kulkukaavio ja sen perusteella funktion periaatteellinen kuvaaja siten, että kuperuudet ovat oikein, minimi ja maksimi on paikoitettu oikeille kohdille ja nollakohtia on oikea määrä. Nollakohtien paikkaa ei tarvitse määrittää tarkasti. Kuvan ei tarvitse olla mittakaavassa, mutta merkitse minimi- ja maksimipisteiden koordinaatit. (8p)

b) Aatun Automeikkaus Oy myy auton käsinpesu- ja kovavahauspalvelua. Yritys on vielä vähän alkuvaiheissaan ja siksi perustaja Aatu (joka on myös ainoa työntekijä) miettii kovasti, mikä olisi palvelulle oikea hintataso. Ensimmäisen kuukauden aikana Aatu piti avajastarjousta, jossa hinta oli 46 €; tällä hinnalla pesuvahauksia meni kaupaksi 140 kappaletta. Seuraavalle kuukaudelle Aatu muutti hinnan 76 euroon; tällöin menekki oli 80 kappaletta. Yhden pesu- ja vahauskerran vaatimat tarvikkeet ja aineet maksavat 18 €. Tämän lisäksi Aatu maksaa hallistaan 1500 € kuukausivuokraa. Oletetaan hinnan ja kysynnän välinen suhde lineaariseksi.

- i) Määritä pesuvahauksen kysyntäfunktio ja kysynnän käänteisfunktio. (4p)
- ii) Määritä Aatun liiketoiminnan voittofunktio. (2p)
- iii) Optimoi Aatun liiketoiminta. Mikä hänen kannattaisi asettaa pesuvahauksen hinnaksi, ja kuinka paljon olisi tällä hinnalla saavutettava kuukausittainen voitto? (4p)

5. Alla on esitetty kaksi yhtälöryhmää (i ja ii).

$$i) \begin{cases} 2x + 5z - 39 = 4y \\ 2z + 3y + 11 = x \\ 3x - 29 = y - 6z \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 8x + 7y - 5 = 0 \\ 6x + 3y + 39 = 0 \end{cases}$$

a) Muunna nämä yhtälöryhmät matriisimuotoon. (5p)

b) Määritä determinantin avulla, onko näille yhtälöryhmille olemassa yksikäsitteinen ratkaisu. (3p)

c) Ratkaise molemmat yhtälöryhmät. Käytä toisen ratkaisussa käänteismatriisia ja toisen ratkaisussa Gauss-Jordanin menetelmää. (5p/kpl, yhteensä 10p)

6. Finanssimatematiikkaa. Missään kohdassa ei huomioida lähdeveroa. (yht. 17p)

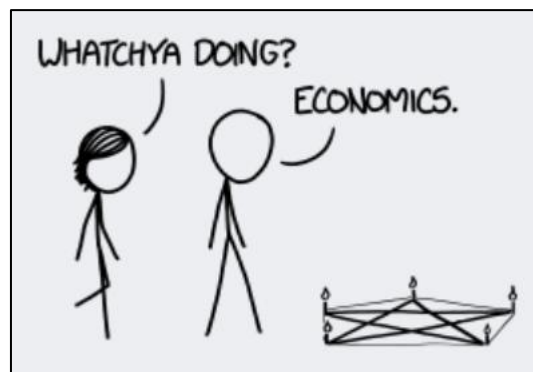
a) Seppo tallettaa 74 500 € tilille, jonka korko on 3.6 % (p.a). Hän nostaa rahat pois 7 kuukauden kuluttua. Kuinka paljon rahaa hän saa? (3p)

b) Justus tallettaa 8600 € tilille, jonka korko on 1.9 % (p.s). Hän aikoo nostaa rahat pois heti, kun tilin saldo ylittää 10 000 euroa. Milloin tämä tapahtuu? (4p)

c) Sisko tallettaa 6300 euroa pankkitilille, jonka korkointensiteetti on 2.8 %. Kuinka paljon rahaa tilillä on 8v 5kk kuluttua aloituksesta? (3p)

d) Aukusti haluaisi ostaa asunnon, jonka hinta on 118 000 euroa. Hänellä on maksaa 10 % kauppahinnasta käsirahana, mutta loput pitäisi ottaa lainaa. Pankki suostuu lainaamaan hänelle puuttuvat rahat 3.9 % vuosikorolla 15 vuoden annuiteettilainana. Kuinka suuri olisi Aukustin lainan kuukausierä? (3p)

e) Seija alkaa säästää ETF-rahastoon tammikuussa 2026. Hän tallettaa rahastoon aina joka kuukauden viimeinen päivä 150 euroa. Rahastonhoitaja toteaa, että tähän mennessä rahaston keskimääräinen vuosituotto on ollut 7.3 %. Mikäli rahasto tuottaa jatkossakin yhtä hyvin kuin se on tuottanut ennen, niin kuinka paljon Seijalla on rahastossa rahaa vuoden 2038 alussa? Laske tarkka vastaus! (4p)



(Lähde: <https://what-if.xkcd.com/111/>)

Todennäköisyyslaskenta

$$P(A) = \frac{\text{A:lle suotuisien alkeistapahtumien lukumäärä}}{\text{Kaikkien alkeistapahtumien lukumäärä}} \quad P(A) = \sum P(A_i)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(A) = 1 - P(A^C) \quad N_A = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_m \quad P_n = n!$$

$$V_{n,k} = P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad P = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \binom{n_3}{k_3} \cdots}{\binom{n}{k}}$$

Funktiot ja yhtälöt

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad p(x) \cdot q(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \text{ TAI } q(x) = 0 \quad \sqrt[n]{f} = f^{\frac{1}{n}}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad f \circ g = f(g(x))$$

Derivaatta

$$D(x^n) = n \cdot x^{n-1} \quad D(f + g) = f' + g' \quad D(af) = af' \quad D(fg) = f'g + fg'$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad D(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g' \quad D(g^n) = n \cdot g^{n-1} \cdot g'$$

$$y(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad L(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad \Delta y \approx f'(x_0) \Delta x$$

$$D(e^x) = e^x \quad D(\ln x) = \frac{1}{x} \quad D(e^{g(x)}) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \quad D(\ln g(x)) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

Taloustieteiden mallinnuksen perusfunktiot

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} \quad C'(x) = MC(x) \quad AR(x) = \frac{R(x)}{x} \quad R(x) = p(x) \cdot x \quad R'(x) = MR(x)$$

$$\Pi(x) = R(x) - C(x) \quad MR(x) = MC(x) \quad PED = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$$

$$q(p) = a - bp \quad q(p) = Ce^{kp}$$

Potenssien, eksponenttien ja logaritmien laskusäännöt

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (a^r)^s = a^{rs} \quad a^0 = 1$$

$$\log(r) + \log(s) = \log(rs) \quad \log(r) - \log(s) = \log\left(\frac{r}{s}\right)$$

$$\log(r^s) = s \log(r) \quad \log_r r = 1 \quad \log_a 1 = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\log_e x = \ln x \quad \log_{10} x = \lg x$$

Integrointi

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \int b dx = bx + C$$

$$\int [af(x) + bg(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx \quad \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad \int f \cdot g dx = F \cdot g - \int F \cdot g' dx$$

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$a = \int_0^{Q^1} P(q) - P^1 dq \quad c = \int_0^{Q^1} P^1 - P(q) dq$$

Matriisien laskusäännöt

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (A - B)^T = A^T - B^T \quad (A^T)^T = A \quad (rA)^T = rA^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad A\bar{x} = \bar{b} \quad \bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$\det(A) = \det(A^T) \quad \det(AB) = \det(A) \det(B) \quad \det(I) = 1$$

Lineaarinen optimointi, prosenttilaskenta, summat ja indeksit

$$y_1 \leq k_1 x + b_1 \quad y_2 \leq k_2 x + b_2 \quad y_T = k_T x + b_T \quad p = \frac{b}{a} \cdot 100\% \quad p = \frac{b-a}{a} \cdot 100\% \quad I_t(p) = \frac{p_t}{p_0} \cdot 100$$

$$b = ka \quad k = \frac{100+p}{100} \quad b = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n \cdot a \quad I_t(q) = \frac{q_t}{q_0} \cdot 100$$

$$\sum_{i=1}^n a = na \quad \sum_{i=1}^n ax_i = a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \quad \sum_{i=a}^n (\dots) = \sum_{i=1}^n (\dots) - \sum_{i=1}^{a-1} (\dots)$$

Lukujonot ja sarjat

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad a_{i+1} = f(a_i) \quad a_{i+1} = a_i + d \quad a_i = a_1 + (i-1)d \quad S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$
$$a_{i+1} = qa_i \quad a_i = q^{i-1} a_1 \quad S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Finanssimatematiikka

$$i = \frac{p}{100} \quad \Delta K = itK_0 \quad K_t = K_0(1+it) \quad i_{netto} = \left(\frac{100-p_{lv}}{100}\right) i \quad k = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} K_0$$

$$K_n = (1+i)^n K_0 \quad K_n = r^n K_0 \quad i_r = i - i_h$$

$$K_n = k \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad K_0 = r^{-n} K_n = \frac{K_n}{r^n} \quad k_e = \frac{kn_e(2+i) - ik}{2} \quad K_n = k_e \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$K_t = e^{\rho t} K_0 \quad i_e = e^\rho - 1 \quad NPV = -H + \sum_{t=1}^n \frac{k_t}{(1+i)^t} + \frac{JA_n}{(1+i)^n}$$